26/2/14

שיעור שבוע 2

אנחנו מתעסקים במשוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון כלומר $\dot{x}=f(t,x)$ ובנוסף יש תנאי התחלה $x(t_0)=x_0$. זה נקרא בעיית קושי. ראינו שלוש שיטות לפתרון: אוילר / קושי / פיקרד.

פיקרד ← ראינו שמציאת פתרון למשוואה הדיפרנציאלית שקול לפתרון $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$ המשוואה האינטגרלית.

(נגדיר $\varphi_{n+1}=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds$ ומתקיים $\varphi_n \xrightarrow{u} x$ [צריך סוף הוכחה]

דוגמא: [לקירובי קושי. ראינו כבר דוגמא לקירוב אוילר]

אם $x(t)=C_0+\dots+C_kt^k$ ונתון $x_0=x(0)$ אז $C_0=x_0$. כמו כן מגזירה איבר איבר $\dot{x}=\sum_{k=1}^{k} kC_kt^{k-1}$! אז אם המשוואה שלנו היא $\dot{x}=x$ אז $C_k=\frac{1}{k}C_{k-1}$ של הטענה לפתרון המשוואה. אז

$C_0=x_0$, $C_1=\frac{x_0}{1}$, $C_2=\frac{x_0}{2}$, ..., $C_k=\frac{x_0}{k!}$

אז הפתרון למשוואה! $x(t)=x_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ ← אז הפתרון $x(t)=x_0e^t$

וזה אכן הפתרון למשוואה.

תרגיל: $\begin{cases}\dot{x}=x^2\\ x(0)=x_0\end{cases}$ בע"ת קושי. !למצוא פתרון בעזרת קירובי פיקרד, כלומר $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_kt^k$!למצוא כלל נסיגה לנוסחא C_k ולהשוות לנוסחא המפורשת לפתרון שמקבלים מפתרון בהפרדת משתנים.

דוגמא: [לקירובי פיקרד]

המשוואה: $\begin{cases}\dot{x}=x\\ x(0)=x_0\end{cases}$ אם $\varphi_0(t)\equiv x_0$! $\varphi_{n+1}=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds$

אבל במקרה זה f היא הזהות! אז במקרה זה נקבל $\varphi_{n+1}=x_0+\int_0^t \varphi_n(s)ds$ כי $t_0=0$.

אז מתקיים $\varphi_1(t)=x_0+x_0t$

$\varphi_1(t)=x_0(1+t)$

אז! $\varphi_2=x_0+\int_0^t x_0(1+t)dt = x_0(1+t+\frac{t^2}{2})$

אז! $\varphi_k(t)=x_0(\sum_{j=1}^{k}\frac{t^k}{k!})\xrightarrow{u}x_0e^t$ כצפוי.

מאינדוקציה.

ומתקיים $x(1)=\lim_{N\to\infty}x_0(1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n!})=x_0e$. אז מצאנו שני קירובים ל-e!

$\boxed{\text{פיקרד זה הטור}}$

$\boxed{\text{אוילר זה הגבול של הסדרה } (1+\frac{1}{N})^N}$

20/2/14

המשך שיעור 2

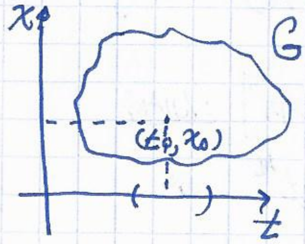
⊖ התשובה של פיקרד מדויקת יותר מהשיטה של אוילר.

⊖ אם כאן רק ראינו דוגמאות לפיקרד, כעת נראה משפטים שמתארים את ההתנהגות.

משפט קיום ויחידות:

עבור בע"ה קושי $\dot{x}=f(t,x)$; $x(t_0)=x_0$; f פונ' רציפה ב- $G\subseteq\mathbb{R}^2$

; G תחום פתוח קשיר. ; $(t_0,x_0)\in G$ נקודת תנאי התחלה. בנוסף נניח ש $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת ורציפה ב G.



אז קיימת סביבה של t_0, כלומר מספר $a>0$,

; פונ' $x:(t_0-a,t_0+a)\to\mathbb{R}$ וגזירה ברציפות כך ש

$(t,x(t))\in G$ לכל $t\in(t_0-a,t_0+a)$ ומקיים $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$; וגם $x(t_0)=x_0$

כלומר קיים פתרון למשוואה בסביבה כלשהי של נקודת ההתחלה, שמקיים תנאי התחלה.

נתעניין מתי אפשר להרחיב את הסביבה הכי מקסימלי שמאלה וימינה

יחידות: אם $x(t),y(t)$ שני פתרונות לבע"ת קושי, כלומר $\dot{x}=f(t,x)$

; $\dot{y}=f(t,y)$. ונסמן I_1 הקטע שעליו מוגדרת x ; I_2 הקטע

שעליו מוגדרת y ; $t_0\in I_1\cap I_2$; וגם $x(t_0)=y(t_0)$ אז

$x(t)=y(t)$ לכל $t\in I_1\cap I_2$.

I_1, I_2 לא בהכרח סימטריים סביב t_0

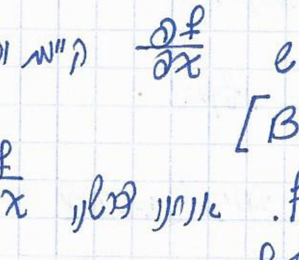
כלומר אם יש שני פתרונות למד"ר שמתלכדים על t_0 אז הם מתלכדים על כל התחום.

הערה: ⊖ חלק הקיום של המשפט מתקיים גם ללא ההנחה ש $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת ורציפה.

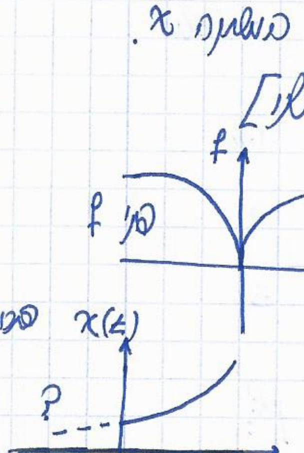
[משפט Peano] [הוכחה בספר Birkhoff-Rota]

⊖ כדי להבטיח יחידות הפתרון צריך לדרוש משהו נוסף על פונ' f. אנחנו דרשנו $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפה, אבל אפשר גם לדרוש פחות, למשל תנאי ליפשיץ על f במשתנה x.

דוגמא נגדית: [דוגמה שאין יחידות כי הפונ' לא מקיימת מה שדרשנו]



$\dot{x}=f(x)=3x^{2/3}$. f לא גזירה באפס ; גם לא ליפשיץ, השיפוע הולך לאינסוף בסביבת אפס.



זו משוואה אוטונומית פשוטה. נקודת שבת

זה כאשר $x\equiv0$. נחלק ונקבל

$$\frac{1}{3}\frac{\dot{x}}{x^{2/3}}=1\longrightarrow\left[x^{1/3}\right]'=1$$

זו המשוואה כל עוד $x\neq0$.

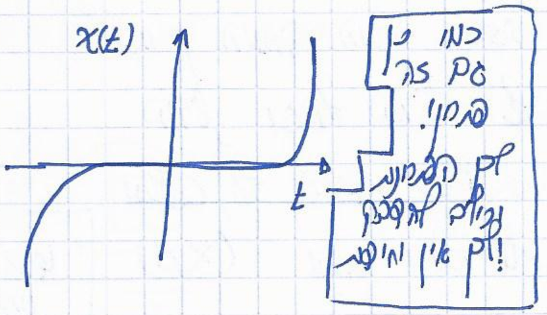
אז $x^{1/3}=t+Const$ $\leftarrow$ $x=(t+Const)^3$ אז מגיע לציר $x=0$ הפתרון

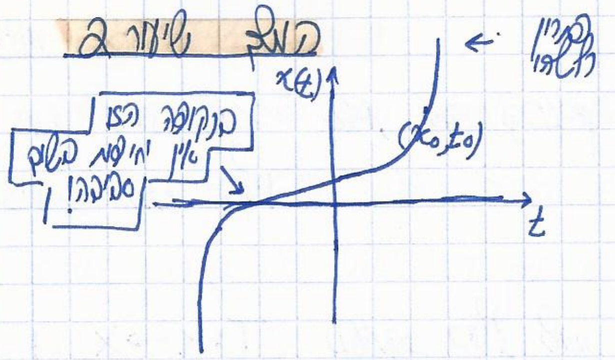
תוך ע"פ המשוואה הזו. אז הפתרונות שלי במקרה שונים חוצים את ציר x!

תזכורת: f גזירה ברציפות על קטע סגור היא בהכרח ליפשיץ, כי הנגזרת חסומה והמקס' הוא קבוע ליפשיץ.

20/2/14

המשך שיעור 2





<u>הוכחת המשפט</u> [לפי קירובי פיקרד]

כזכור הקירובים הם $\varphi_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds$ אז נתבונן בטרנספורמציה $T:\varphi_n\to\varphi_{n+1}$

צריך למצוא נקודת שבת לפי T וזו תהיה פתרון למשוואה הדיפרנציאלית כי זה יהיה פתרון למשוואה האינטגרלית שראינו שבה שקול. איך נוכיח של T יש נקודת שבת.

⊖ <u>נקודת שבת של כיווץ:</u> אם (X,d) מרחב מטרי אז פונ' $d: X\times X\to\mathbb{R}$ נקראת [פונ' מרחק] מטריקה אם $d(x,y)\geq 0$; $d(x,y)=0$ אמ"מ $x=y$. כמו כן $d(y,x)=d(x,y)$ וגם! $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (א"ש Δ)

<u>דוגמאות:</u>

1) $\mathbb{R}^n$: ! $d(x,y)=|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

2) $\mathbb{R}^n$: $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

3) $\mathbb{R}^n$: $d_\infty(x,y)=\max_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

4) $X=C[a,b]$ כלומר פונ' רציפות בקטע (a,b) ונגדיר מרחק
$$d(f,g)=\max_{[a,b]}|f(x)-g(x)|$$
אפשר לקחת מקסימום כי הן רציפות על קומפקט.

5) $X=C[a,b]$! $d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|$ או $d_2(f,g)=\sqrt{\int_a^b|f-g|^2}$

⊖ כאשר יש מרחב מטרי אפשר לדבר על התכנסות במרחב הזה. כלומר נאמר $x_n\to x$ אם $d(x_n,x)\longrightarrow 0$, ואז אפשר לעשות את כל הדברים שלמדנו. כמו כן אפשר להגדיר סדרת קושי.

אם x_n סדרה מתכנסת היא כמובן קושי, אבל להפך לא נכון בכל מרחב מטרי.
דוגמא: $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$! $d(x,y)=x-y$ אז הסדרה $\frac{1}{n}$ עדיין קושי, אבל אין גבול, כי הגבול לא במרחב.

מרחב מטרי (X,d) נקרא שלם אם כל סדרת קושי בו היא סדרה מתכנסת.

<u>דוגמא:</u> $X=C[a,b]$! $d(f,g)=\max_{[a,b]}|f(x)-g(x)|$ זו מטריקה. בדוק.

<u>טענה:</u> $f_n\longrightarrow f$ במרחב הזה שקול $f_n\xrightarrow{u}f$!

20/2/14

המשך שיעור 2

כמו כן המרחב המטרי הזה הוא מרחב מטרי שלם, זה קריטריון קושי להתכנסות במ"ש, וגבול במ"ש של רציפות הוא רציף!

משפט על העתקת כיווץ:

(X,d) מרחב מטרי שלם ו- $T:X\to X$ העתקת כיווץ, כלומר קיים $0<\alpha<1$ כך ש- $d(Tx,Ty)\le\alpha d(x,y)$, לכל $x,y\in X$. אזי קיימת ויחידה x^* נקודת שבת כך ש $x^*=T(x^*)$.

> בהמשך: נראה ש φ שהגדרנו בסיכום היא מכווצת ואז להפעיל שוב ושוב ותכנס במ"ש כי זה יהיה סדרת קושי

הוכחה:

יחידות: נניח X_* ו Y_* נקודות שבת. אזי $d(X_*,Y_*)=d(T(X_*),T(Y_*))$ אבל $\alpha d(X_*,Y_*)\ge d(T(X_*),T(Y_*))$ ו $0<\alpha<1$ בסתירה, כלומר $0=d(X_*,Y_*)$ $\leftarrow$ $X_*=Y_*$.

קיום: נבחר $x_0\in X$ כלשהו $x_1=T(x_0)$, ..., $x_n=T^n(x_0)$ כלומר נפעיל את T שוב ושוב. אופי x_n סדרת קושי, ולכן משום שהמרחב שלם היא מתכנסת $x_n\to x$ ו $x\in X$. מקיים x נקודת שבת. כלומר $T(x)=x$.

ואכן זו סדרת קושי כי

$$d(x_{n+p},x_n)=d(T^n x_p,T^n x_0)\le\alpha^n d(x_p,x_0)\overset{\Delta}{\le}\alpha^n(d(x_0,x_1)+\dots+d(x_{p-1},x_p))$$

ונסמן $l=d(x_0,x_1)$ ומתקיים $d(x_1,x_2)\le\alpha l$ וכך הלאה. לכן

$$d(x_0,x_p)\le l+\alpha l+\alpha^2 l+\dots+\alpha^{p-1}l\le l(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{p-1})$$

לכן:

$$d(x_0,x_p)\le l\cdot\frac{1-\alpha^p}{1-\alpha}<\frac{l}{1-\alpha}$$

לכן לסיכום

$$d(x_{n+p},x_n)\le\frac{l\alpha^n}{1-\alpha}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

לכן זו סדרת קושי ולכן מתכנסת $x_n\to x_*$ כי זה מרחב שלם.

נראה ש x_* נקודת שבת.

נתבונן בסדרה $T(x_n)$ זו אותה הסדרה בהזזה באחד. לכן $T(x_n)\to x_*$, אבל T רציפה כי היא מכווצת (בפרט) לכן $T(x_n)\to x_*$ וגם $T(x_n)\to T(x_*)$ ומיחידות הגבול $T(x_*)=x_*$.

לכן קיימת ויחידה נקודת השבת כנדרש.

בנוסף:

$$d(x_{n+p},x_n)<\frac{l\alpha^n}{1-\alpha}\ ;\ \xrightarrow{p\to\infty}d(x_*,x_n)<\frac{l\alpha^n}{1-\alpha}$$

וזו הערכה שלנו לנקודת השבת, כלומר כמה טוב הקירוב שלנו.

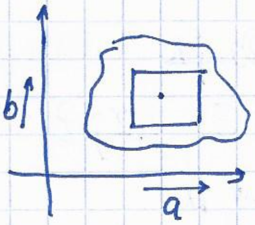
27/2/14

המשך שיעור 2

⊖כעת צריך להוכיח מה הקשר של זה לקירובי פיקרד. אז כזכור $\dot{x}=f(t,x)$

כלומר מתחילים להוכיח את המשפט קיום ויחוד הפתרון לשפשיץ

f רציפה ב $G\subseteq\mathbb{R}^2$! $(x_0,t_0)\in G$.



נבחר מלבן Π שמוכל כולו ב G שמרכזו (t_0,x_0).

$$\Pi=\{(x,t) \mid |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}.$$

f רציפה על G ובפרט על Π, לכן f חסומה על Π ממשפט וירשטראס.

נסמן M להיות המקסימום הנ"ל. [לערך המוחלט].

כזכור $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפה מהתנאי לשפשיץ ולכן גם היא חסומה על Π ולכן נסמן L החסם שלה. [אנחנו צריכים להוכיח שקיימת סביבה שבה יש פתרון, לא בהכרח בכל הסביבה יש פתרון. לכן יכול להיות ש a יקטן]

מכאן נרצה להגדיר מרחב מטרי:
כל הפונ' הרציפות בקטע $X=C[t_0-a,t_0+a]$ and $f(t_0)=x_0$

כלומר $f\in X$ זו פונ' רציפה על $[t_0-a,t_0+a]$ כך ש $f(t_0)=x_0$, ובנוסף התמונה שלה מוכלת במלבן. כלומר $|f(x)-x_0|\le b$.

כל הפונ' הרציפות שהגרף מוכל במלבן Π וכן עוברות ב (t_0,x_0).

נגדיר מטריקה d על X: $d(f,g)=\max_{t\in[t_0-a,t_0+a]}|f(t)-g(t)|$ וזה המקסימום

במרחב הזה שקולה להתכנסות במ"ש. בנוסף זה מרחב מטרי שלם. כלומר גבול במ"ש של רציפות הוא רציף.

⊖איזה העתקה כדאי להגדיר? $T:X\to X$. נזכר שפיקרד היה סדרה φ_i כך ש $\varphi_{n+1}=T(\varphi_n)$! $T(\varphi)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds$.

אז נגדיר העתקה $T:X\to X$ כך שלכל $\varphi\in X$ $(T(\varphi))(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds$. צריך להוכיח ש $T(\varphi)$ אכן שייכת ל X.

ברור ש $T(\varphi)$ רציפה, היא אפילו גזירה ברציפות כאינטגרל של רציפה.

בנוסף היא מקיימת תנאי ההתחלה בבירור, כלומר $(T(\varphi))(t_0)=x_0$.

צריך להוכיח גם $|T(\varphi)(t)-x_0|\le b$ לכל t בתחום.

$$|T(\varphi)(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))ds\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}M\,ds\right|\le M|t_0-t|\le Ma$$

אז נקטין את התחום שלנו כך ש $a\le\frac{b}{M}$ וקיבלנו המבוקש, לכן $T:X\to X$ כנדרש.

המשך הוכחה בקפיצה של דף

27/2/14

תרגול שבוע 2:

[בעיות פיזיקליות אין פתר הכל השתנה בכתב הבא]

מד"ר לינארית מסדר ראשון: אומר $y' + a(x)y = b(x)$ ⟵ [המקדם של y' הוא 1]

איך נפתור?

פרק I ⊖ **גורם אינטגרציה** - נסמן $\mu(x) = e^{\int_0^x a(s)\,ds}$. מכפילים את המד"ר

ב μ. נקבל $\mu b(x) = \mu a(x)y + \mu y'$ = $\mu' y + \mu y'$ לפי ע"ל

אינטגרציה כאן נקבל $\mu y = \int \mu(x)b(x)dx$

דוגמא: $y' + \frac{4}{x}y = x^4$ אז נסמן $\mu(x) = e^{\int_0^x \frac{4}{t}dt}$ ⟵ $\mu(x) = e^{4\ln|x|}$

לכן $\mu(x) = |x|^4$. לכן נכפיל במשוואה ונקבל

$(x^4 y)' = x^8 \rightarrow x^4 y = \frac{x^9}{9} + C \rightarrow y = \frac{x^5}{9} + C \cdot x^{-4}$

פתרון למד"ר.

פרק II ⊝ **שיטת וריאציית המקדמים:**

תחילה פותרים צורה ההומוגנית של המד"ר שהיא $y' + a(x)y = 0$. פותרים

בעזרת הפרדת משתנים, מוצאים הפתרון שהוא שכולל בתוכו פתרון להומוגני

אבל לא למד"ר שלנו.

לאחר שפתרנו את המקרה ההומוגני. נסמן $y_p = C_1(x) \cdot f(x)$ כאשר

זה פתרון של המד"ר ההומוגנית. נציב הפתרון במד"ר וננסה למצוא את C_1.

כלומר מפתרון ההומוגני קיבלנו פתרון כללי כאשר הקבועים הם פונ' של x

ונציב הפתרון במד"ר ונחליף את הקבוע שלו בה. כך נמצא פתרון פרטי למד"ר

ובעזרת ע"י הוספת הפתרון ההומוגניים נקבל את הפתרון.

← פתרונות למד"ר לינארי הם הפתרון הפרטי שמצאנו בשיטה ועוד הפתרון ההומוגני

כי זה מרחב לינארי

מד"ר ברנולי: $y' + a(x)y = b(x)y^n$ כאשר $n \neq 0, 1$

כי אחרת זה מד"ר לינארית.

הערה: עבור $n > 0$ אז $y = 0$ פתרון כמובן. לכן $y \neq 0$ נחלק ב y^n

ונקבל $\frac{y'}{y^n} + a(x)y^{1-n} = b(x)$ ומבצעים הצבה $z(x) = (y(x))^{1-n}$ ואז

מקבלים $z'(x) = (1-n)y^{-n}y'$ ואז יש לנו מד"ר לינארית ב z.

$\frac{z'}{1-n} + a(x)z = b(x)$; נפתור אותה ונפתור.

27/2/14

המשך שיעור 2

כל מה שנשאר להוכיח זה ש T מכווצת ובזה נוכל לסיים, ולקבל התכנסות במ״ש של הסדרה של הנקודה שלה שהיא פתרון למד״ר. ואכן

$$d(T(\varphi),T(\psi)) = \left|(T(\varphi))(t)-(T(\psi))(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds - f(s,\psi(s))ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} \left|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\right|\right| \overset{\text{ליפשיץ}}{\le} \left|\int_{t_0}^{t} L\left|\varphi(s)-\psi(s)\right|ds\right| \le L\cdot\max_{s\in[t_0-a,\,t_0+a]}\left|\varphi(s)-\psi(s)\right|\cdot a$$

לכן:

$$d(T(\varphi),T(\psi)) \le L\cdot a\cdot d(\varphi,\psi)$$

לכן נבחר a קטן מספיק כך ש $La<1$ ונוכל לסיים. זה אכן כיווץ קפדני!

לכן T מכווצת ובמרחב מטרי שלם, לכן יש לה נקודת שבת והנקודה הזו היא פונ' שפותרת את המד״ר.

המשך תרגול 2

מד״ר ברנולי

תרגיל: $y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac13}$. זו נראית ברנולי עבור $n=\frac13$. אזי $y\equiv0$

פתרון טריוויאלי למשוואה. נכפיל ב $y^{-\frac13}$ ונקבל $y'\cdot y^{-\frac13} - \frac{3}{x}\cdot y^{\frac23} = x^4$

נסמן $z=y^{\frac23}$ ולכן $z' = \frac23 y' y^{-\frac13}$ ולכן יש לנו מד״ר

$$\frac32 z' - \frac{3}{x}z' = x^4 \longrightarrow z' - \frac{2}{x}z' = \frac23 x^4$$

נעשה שיטת גורם אינטגרציה: $\mu = \frac{1}{x^2}$ ונקבל $\frac{z}{x^2} = \int\frac{x^4}{x^2}\cdot\frac23 dx$

לכן $\frac{z}{x^2} = \frac29 x^3 + Const \longleftarrow z = \frac{x^5}{9} + Const\,x^2$ ולכן!

$$y = \left(\pm\sqrt{\frac{x^5}{9}+Const\,x^2}\right)^3 \leftarrow y^{\frac23} = \frac{x^5}{9} + Const\,x^2$$

משוואת ריקאטי: $y' = b(x)y^2 + a(x)y + c(x)$ (כאשר $b,c\neq0$) כדי לקבל מד״ר שאינה ברנולי ואינה לינארית.

איך נפתור? בהינתן פתרון פרטי $u(x)$ [לנחש] אז נחפש פתרון מהצורה $y(x)=u(x)+v(x)$. נציב במד״ר ונקבל

$u'(x)+v'(x) = b(x)\left(u(x)^2+2u(x)v(x)+v^2(x)\right) + a(x)\left(u(x)+v(x)\right) + c(x)$. משום ש u פתרון למד״ר נקבל ש $u'(x) = b(x)u^2(x)+au+c$ לכן נשארנו

$$v'(x) = 2u(x)v(x) + b(x)v^2(x) + a(x)v(x)$$

$$v'(x) = v(x)\left(2b(x)u(x)+a(x)\right) + b(x)v^2(x) \leftarrow$$ זו משוואת ברנולי שאותה ידוע לפתור

בהצבה: $y = u + \frac{1}{v}$ נקבל מד״ר לינארית