19/2/14

שיעור שבוע 1

⊖ נכיר את הנושאים המרכזיים במדע בעבר, במיוחד בתקופת הצבא הגאום.
המד"ר באות לתאר תהליכים שמופיעים בטבע. הקורס מאוד שימושי.

(*) יהיו שיעורי בית ויש חובת הגשה! צריך להגיש 9 תרגילים לפחות עם ציון חיובי

מיכאל ביאלי חדר 104 בשרייבר. לתאם פגישה מראש במייל: bialy@post.tau...

יש אתר לקורס במודל.

מה זה משוואה דיפרנציאלית? איפה הן מופיעות?

זה משוואה עם פונ' שכוללת נגזרת

⊖ דוגמא: [מכניקה]

$$\overset{m}{\longrightarrow}\ \ x$$
0

חלקיק בעל מסה שפועל עליו כח: $F(x,t)$ שתלוי במיקום שלו ובזמן. מהחוק השני של ניוטון נקבל $m\cdot a=F$. נסמן $x(t)$ את מיקום החלקיק ברגע t. את $x(t)$ אנחנו לא יודעים, זה מה שאנו רוצים למצוא.

נשים לב כי $\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}(t)$ זה המהירות של החלקיק ברגע t וגם היא פונ' של t. ולכן $a=\ddot{x}(t)$ הינה התאוצה. לכן חוק שני של ניוטון הנו למעשה $F(x(t),t)=m\ddot{x}(t)$ שזו למעשה משוואה דיפרנציאלית עבור $x(t)$, וזו משוואה שהיא מסדר שני כי מופיעה הנגזרת השנייה.

סדר של משוואה זה הנגזרת הגבוהה ביותר של הפונ' הנעלמת

$x(t)$ היא פונ' נעלמת, זו הנעלם במשוואה שלנו. ונסמן $m\ddot{x}=F(t,x)$ ופתרון למשוואה זו הינה פונ' $x(t)$ שכאשר נציב אותה במשוואה נקבל זהות בין הפונקציות לכל t, כלומר שוויון פונקציות.

מד"ר זה דבר קשה... לא יודעים כיצד לפתור את רובן

~~בקורס זה הנעלם הוא פונ' נעלמת אחת~~

בקורס הזה הפונ' הנעלמות הן פונ' של משתנה אחד! זה מד"ר ולא מד"ח! אבל צריך לזכור שיהיו כמה פונ' נעלמות במשוואה, אבל כולן במשתנה אחד משותף.

⊖ דוגמא: [חיי יומיום]

פירוק רדיואקטיבי: יש לנו חומר רדיואקטיבי שמתפרק עם הזמן. $x(t)$ זה כמות החומר ברגע t. המודל אומר שקצב הפירוק פרופ' לכמות החומר ולכן $\dot{x}(t)=-kx(t)$ הינה משוואה דיפרנציאלית.
זו משוואה של סדר ראשון, של $x(t)$.

תחילה נשים לב כי $x(t)=0$ הינו פתרון טריוויאלי למשוואה.

למעשה אם $x(t)\neq 0$ נקבל $(\ln|x|)'=\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}=-k$

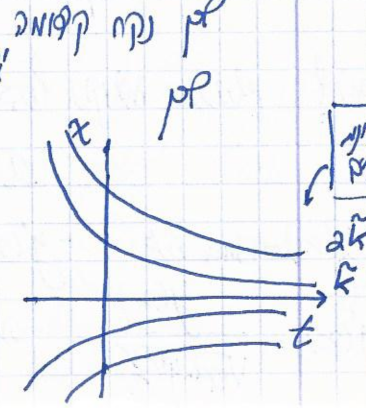
לכן נקח קדומה, ונקבל $\ln|x|=-kt+C$

לכן $|x|=e^{-kt}\cdot\underbrace{e^{C}}_{K}$ לכן $|x(t)|=Ke^{-kt}$

$$\downarrow$$

$$x(t)=\tilde{k}e^{-kt}$$

לכל $\tilde{k}$ זה פתרון למשוואה.



כל הפתרונות בגרפים

19/2/14

המשך שיעור 1

⊖ נשים לב שיש כמה של פתרונות אפשריים, ולא רק אחד!

המשמעות של $\tilde{k}$ בדוגמא הקודמת זה הכמות ההתחלתית כי

$$x(0)=\tilde{k}e^{0}=\tilde{k} \longrightarrow x(t)=x(0)e^{-kt}$$

כלומר מה שקובע את הקבועים, כלומר מה שבוחר הפתרון היחיד מתוך הרבה זה תנאי ההתחלה.

במקרה זה $x(0)$ הוא תנאי ההתחלה. כדי לתאר תהליך כלשהו צריך לדעת משהו על מצבו ההתחלתי של התהליך.

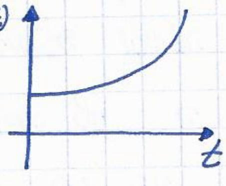
<u>דוגמא:</u> גידול כסף בבנק. נסמן $x(t)$ את כמות הכסף בזמן t. מתקיים שקצב גידול הכסף זה ריבית כלשהי.

$$\dot{x}(t)=\underset{\text{ריבית}}{k}\,x(t)$$

וזו אותה המשוואה כמו קודם.

לכן גם פה יש פתרון טריוויאלי $x(t)=0$, וכל השאר הם כמו קודם $x(t)=x(0)e^{kt}$ כאשר $x(0)$ זו כמות הכסף ההתחלתית.

משוואה אוטונומית
$$\dot{x}=f(x)$$
כלומר אינה תלויה ב



<u>דוגמא:</u>

אוכלוסיה של פילים מגודל $x(t)$. במודל הזה $\dot{x}=k\cdot x^{2}$.

אם $x(t)\equiv 0$ זה פתרון. אחרת

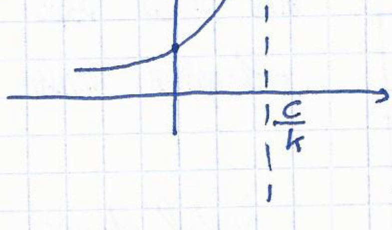
$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{x(t)}\right]=\frac{\dot{x}}{x^{2}}=k$$

לכן $\frac{1}{x(t)}=-kt+C$ לכן $x(t)=\frac{1}{C-kt}$

נמצא את C בעזרת $x(0)$. אז $C=\frac{1}{x(0)}$

מהצבת אפס, לכן תנאי ההתחלה קובע את C! לכן

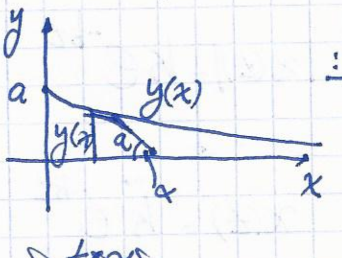
$$x(t)=\frac{1}{\frac{1}{x_0}-kt}$$



לכן זמן החיים של המודל הזה הוא סופי! בזמן $\frac{C}{k}$ יהיו אינסוף פילים. זה נקרא Blow up.

<u>דוגמא:</u>

מצא קו $y(x)$ כך שבכל נקודה המשיק הוא תמיד מאורך a. $y(x)$!



אז $-y'(x)=\tan\alpha$ אז $y(x)=a\sin\alpha$

נשים לב כי $\sin\alpha=\cancel{\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^{2}\alpha}}}$ מפיתגורס

לכן המשוואה!

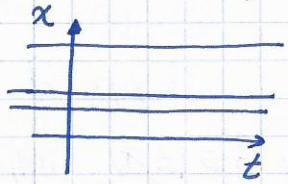
$$-y'(x)=\frac{y(x)}{\sqrt{a^{2}-y^{2}(x)}}$$

19/2/14

המשך שיעור 1

משוואה אוטונומית: $\dot{x} = f(x)$; כלומר אין תלות במשתנה הבלתי תלוי.
(מסדר ראשון)

הגדרה: נקודה x_* נקודת שבת אם $f(x_*)=0$. לכל נקודת שבת x_* מתאים פתרון של משוואה דיפרנציאלית שהוא $x(t) \equiv x_*$ כלומר הפתרון הקבוע, וזה ברור מהצבה פשוטה.



פתרונות של נקודות שבת, כלומר פתרונות קבועים.

בין נקודות האפסים של f אם היא שומרת סימן מרציפות, לכן מהמשוואה האוטונומית נקבל שהנגזרת גם שומרת סימן בקטעים האלה.

במקום שבו $x \neq 0$ אז $\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$. נחפש את הפונקציה שאותה גזרנו כדי לקבל את זה.

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(\xi)}\,d\xi\right] = \frac{d}{dt} F(x(t))$$

$\boxed{\text{המשפט היסודי של החדו"א}}$

ומכלל השרשרת נקבל:

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \frac{d}{dt} F(x(t)) \cdot \dot{x} = \frac{1}{f(x)} \cdot \dot{x}$$

לכן כל פתרון פרט לנקודת שבת מקיים

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(\xi)}\,d\xi\right] = 1$$

לכן

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(\xi)}\,d\xi = t + Const$$

איך נמצא את Const? נציב תנאי התחלה. אם $x(t_0)=0$ אז $Const = -t_0$ ולכן:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(\xi)}\,d\xi = t - t_0$$

היינו פתרון באופן סתום של $x(t)$ שמקיים תנאי התחלה $x_0 = x(t_0)$.

מקרה יותר כללי:

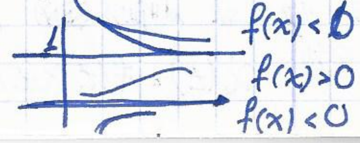
משוואות בעלות הפרדת משתנים: $\dot{x} = f(x) \cdot g(t)$; פותרים בדיוק כמו משוואות אוטונומיות רגילות.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \longrightarrow \frac{dx}{f(x)} = g(t)dt \longrightarrow \int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)dt + C$$

תרגיל: להצדיק המעברים האלו.

דוגמה: $\dot{x} = x(1-x) = f(x)$; נקודות שבת $x \equiv 0, 1$ ולכן אלו שני פתרונות.

ולכן:



פותרים עם שברים חלקיים $\rightarrow \int \frac{dx}{x(1-x)} = t + Const$

20/2/14

שיעור שבוע 1

[עדיין לא פורמלי]

<u>משוואה של סדר ראשון:</u> באופן כללי זה $\dot{x} = f(t,x)$ כאשר הפונ' הנעלמת

גרסה כללית יותר
$F(\dot{x},x,t)=0$
אך לא נעסוק בה

היא $x(t)$. ופתרון למשוואה הוא פונ' שמספקת המשוואה.

נניח כי f פונ' רציפה של שני משתנים $G \subseteq \mathbb{R}^2$

<u>נגדיר שדה של כיוונים:</u> על תחום G

שדה של כיוונים. בכל נקודה $(t,x) \in G$ נגדיר קו ישר במישור $\mathbb{R}^2$ בעל שיפוע $f(t,x)$, כלומר כמו הנגזרת של $x(t)$, כי המד"ר מתקיים.

משמעות גיאומטרית לפתרון משוואה דיפרנציאלית

כלומר בכל נקודה מציירים קו שהשיפוע שלו $f(t,x)$.

אם $x(t)$ הוא פתרון של $\dot{x} = f(x,t)$ אזי $\dot{x}(t_0) = f(t_0, x(t_0))$

כלומר $\dot{x}(t_0)$ זה השיפוע של המשיק לגרף של $x(t)$ בנקודה t_0. ! $f(t_0,x(t_0))$

זה השיפוע של שדה הכוונים בנקודה t_0. לכן פתרון זו פונ' שהגרף שלה הוא בעל שיפוע רק שבכל נקודה שהוא עובר הוא בעל שיפוע כמו שדה הכיוונים.

<u>הגדרה:</u> <u>בעיית תנאי התחלה:</u> [בעי"ת קושי]

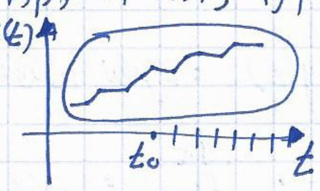
נתונה משוואה $\dot{x}=f(t,x)$ כאשר f רציפה על G; נקודה $(t_0,x_0)\in G$ היא נקודת תנאי התחלה. המטרה היא לחפש פתרון של המשוואה כך ש $x(t_0)=x_0$, כלומר פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה.

כלומר צריך פונ' שמשיקה לשדה הכוונים ועם עוברת ב (t_0,x_0).

⊖ נראה שאם f מקיימת תנאים מסוימים אז הפתרון קיים ויחיד, כלומר קיימת רק פונ' אחת כזו שפותרת את המשוואה ועוברת ב (t_0,x_0)

<u>שיטות לקירוב פתרון לבעיית תנאי התחלה:</u> [יש משוואות שלא ניתן לפתור לגמרי...]

(1) <u>אוילר:</u> הרעיון הוא שבכל נקודה מותחים קו באיזה כיוון לפי השדה. ככה נחלק הציר לקטעים קטנים, ובכל קטע נתקדם לפי השיפוע. כלומר בכל מקטע נקרב ע"י פונ' לינארית.



אז מתקיים:

$$\begin{cases} t_i = t_0 + h\cdot i \\ x_i = x_{i-1} + h\cdot \underbrace{f(t_{i-1},x_{i-1})}_{\text{השיפוע בתחילת הקטע}} \end{cases}$$

!

משמעות זה תהליך רקורסיבי וכאשר $h \to 0$ זה מקרב לפתרון. משפט...

(2) <u>פיקארד:</u> נתונים התנאים ההתחלתיים

$$\begin{cases} \dot{x}=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

נניח כי $x(t)$ פתרון למשוואה. פונ' גזירה ברציפות המקיימת את תנאי ההתחלה. אזי $\dot{x}(t)=f(t,x(t))$

נעשה אינטגרל:

המשך שיעור 1

20/2/14

המשך: אז נקבל מהמשפט היסודי של החדו"א: $x(t)-x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$

וקיבלנו משוואה אינטגרלית ממשוואה דיפרנציאלית.

לכן כל $x(t)$ גזירה ברציפות שהיא פתרון של בעיית תנאי ההתחלה מקיים כי

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$$

וגם להיפך, שאם $x(t)$ רציפה מקיימת המשוואה האינטגרלית, אז גם מקיימת המשוואה הדיפרנציאלית, ממשפט היסודי של החדו"א, ובפרט זו גם פונ' גזירה ברציפות כקבוע ועוד פונ' גזירה ברציפות, שוב מהמשפט היסודי של החדו"א. כמו כן $x(t)$ שמקיימת משוואה אינטגרלית זו מקיימת את בעיית תנאי ההתחלה.

⊖ לכן פתרון גזיר ברציפות למשוואה הדיפרנציאלית שקול לפתרון רציף למשוואה האינטגרלית.

רעיון לקיום הפתרון:

נמצא סדרה של פונקציות $\varphi_n(t)$ כאשר $\varphi_0(t)=x_0$ ונפעיל תהליך איטרטיבי.

$\varphi_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))\,ds$; אם נמשיך בקירובים הללו בהנחות מסוימות נקבל φ_n רציפה לכל n ובנוסף:

$$\varphi_n(t) \xrightarrow{\text{במ"ש}} \varphi(t)$$

כאשר φ היא פתרון למשוואה האינטגרלית ובפרט למשוואה הדיפרנציאלית.

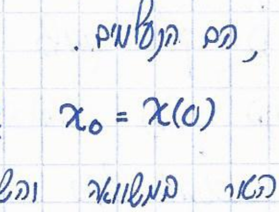
③ קושי: נניח כי $\dot{x}=f(t,x)$; f פונ' הולומורפית/אנליטית. $f=\sum_{k=0,\,l=0} f_{k,l}(\,)^k(\,)^l$

נחפש $x(t)$ גם כן בצורה של טור $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k(t-t_0)^k$ ונרצה למצוא את C_i, הם הנעלמים.

כמו כן $x_0=x(0)$ ולכן $C_0=x_0$. אח"כ הנוסחה על המקדמים C_k ע"י הצבת הטור במשוואה והשוואת מקדמים מתקבלת נוסחה. אם f אנליטית המקדמים שנקבל הם יוצרים פונ' אנליטית שפותרת את המשוואה הדיפרנציאלית.

דוגמא: $\dot{x}=x$ אז ידוע כי $x_0e^t=x(t)$. איך שיטת הקירוב יעזרו לנו?

אוילר: אז נבחר $h=\frac{1}{N}$ עבור N כלשהו. אז



$t_i=t_{i-1}+h$

$x_i=x_{i-1}+h f(t_{i-1},x_{i-1})$

אבל f מאוד פשוטה ולכן למשל נקבל $x_i=x_{i-1}+hx_{i-1}$

לכן $x_i=x_{i-1}(1+\frac{1}{N})$ לכן $x_i=x_0(1+\frac{1}{N})^i$ ולכן $x_N=x_0(1+\frac{1}{N})^N$

לכן $\lim x_N = x_0e$ כאשר $N\to\infty$. וזה לכן הפתרון האמיתי.

4/ג/תשס

תרגול שבוע 1

צחי הזן
מייל
zahikaza@post...
שעת קבלה בתיאום במייל.

תוספת תרגול של 9 תרגילים שיהיו לפחות חצי מהשאלות

להגיש עד יום חמישי בשעה 5. אפשר להגיש בשיעור עצמו או בתא בשיעורי בקומה הראשון.

התרגילים יופיעו בmoodle באתר

נסמן y' להיות הנגזרת של y לפי x

⊖ פונקציות הן אבן היסוד של המתמטיקה. בקורס זה חוקרים משוואות ומנסים למצוא מהן פונקציות.

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית היא משוואה בה מופיעה פונ' ונגזרותיה, רק לפי משתנה אחד. כלומר

$$F(x,y,y',y'',\dots)=0$$

כאשר x המשתנה החופשי ! y פונ' של x, ובנוסף F פונ'.
y היא הנעלם במשוואה.

* מד"ר תקרא אוטונומית אם המשתנה לפיו גוזרים לא מופיע במשוואה.
* מד"ר תקרא לינארית אם F היא קומבינציה לינארית של y ונגזרותיה עם מקדמים שהם פונ' רציפות ב x.

כלומר $a_0(x)y+a_1(x)y'+\dots+a_n(x)y^{(n)}=b(x)$

* מד"ר תקרא לינארית הומוגנית אם $b(x)=0$
* סדר של מד"ר הוא סדר הנגזרת הגבוהה ביותר.

סימון: $\dot{y}=\frac{dy}{dz}$; $\ddot{y}=\frac{d^2y}{dz^2}$; ... כלומר סימון לנגזרת לפי z.

מד"ר מסדר ראשון:

⊖ מד"ר תקרא ניתנת להפרדה אם ניתן לרשום אותה באופן $y'=f(x)\cdot g(y)$

איך נפתור? נרצה להפריד משתנים כלומר לחלק ב $g(y)$ ונקבל $\frac{y'}{g(y)}=f(x)$; אך אסור לנו לחלק באפס (בפרט בנקודות מתי $g(y)=0$).

כאשר $g(y)=0$. נקבל שהנגזרת צריכה להיות אפס, ולכן כל פונ' y כזו תהיה למעשה פונ' קבועה שתלויה על הערך שמאפס את g.
פתרון y כזה הוא נקרא פתרון שבת. אם $g(y)\neq 0$ אז ניתן לחלק ולאחר אינטגרציה נקבל [אינטגרציה לפי x]

משפט החלפת משתנים

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int\frac{\frac{dy}{dx}}{g(y(x))}dx=\int f(x)dx=F(x)+C_2$$

$$G(y)+C_1$$

מניחים ש g פונ' אשר הפונקציה הקדומה שלה קיימת

ולכן! $G(y)=F(x)+C_2-C_1$ וזה פתרון למשוואה.

לפעמים זה מניב פתרון סתום לפונ' y. אם ניתן, נחלץ את y כפונ' של x.

20/2/14

המשך תרגול 1

<u>תרגיל:</u> פתרו את בעיית ההתחלה $xy' + y = y^2$; $y(1) = \frac{1}{2}$.

<u>פתרון:</u> זוהי מד"ר לא אוטונומית, לא לינארית מסדר ראשון. נקבל $xy' = y^2 - y$ וזו ניתנת להפרדה ונקבל $\frac{y'}{y^2 - y} = \frac{1}{x}$

לא מפריע לנו ש $x=0$ כי מחפשים פונ' y שמוגדרת לרוב ה-x

מתי $y(y-1)=0$? נקבל $y\equiv 0$! $y\equiv 1$ פתרונות השפה. למד"ר, אך לא מקיימים את תנאי ההתחלה ולכן לא פתרונות לבעיית ההתחלה.

נעשה אינטגרציה:

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \ln|x| + \ln C_1$$

נעשה שברים חלקיים ונקבל

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$$

לכן

$$-\int \frac{1}{y} + \int \frac{1}{y-1} = -\ln|y| + \ln(|y-1|) = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + Const$$

לכן לסיכום

$$\ln C_1 + \ln|x| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$

↓ אקספוננט משני האגפים

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = C_1|x| \longrightarrow \frac{y-1}{y} = C_2 x$$

כאשר $C_2 = \pm C_1$

לכן $C_2 \neq 0$

לכן $\frac{y-1}{y} = C_2 x$ לכל $C_2 \in \mathbb{R}$ הינו פתרון למד"ר.

נציב תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\frac{y(1)-1}{y(1)} = C_2 \rightarrow \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} = C_2 \rightarrow C_2 = -1$$

לכן $y - 1 = -xy$

לכן $y(1+x) = 1 \leftarrow y = \frac{1}{1+x}$ כנדרש.

<u>תרגיל:</u> $y' = f(ax + by + C_1)$

<u>פתרון:</u> נסמן $z = ax + by + C_1$ נגזור לפי x ונקבל $z' = a + by'$ אבל מהמשפט נקבל $y' = f(z)$ לכן $z' = a + bf(z)$ לכן $\frac{z'}{a + bf(z)} = 1$

וזו מד"ר שאני יודעים לפתור, בעזרת אינטגרציה על x.

<u>תרגיל:</u> פתרו $y' = \cos(y - x)$. נסמן $z = y - x$ אז $z' = y' - 1$ אז $z' = \cos(z) - 1$ הינה מד"ר חפשה. נבדוק מתי $\cos z = 1$ אז $z = \cancel{\ }+2\pi k$ לכן $y - x = \cancel{\ }+2\pi k$ לכן $y = x + \cancel{\ }\,2\pi k$ לכל k הינו פתרון למד"ר שלך. זה פתרון סינגולרי למד"ר. כעת אפשר לחלק ב $\cos(z) - 1$.

2022/3/14

המשך תרגול 1

המשך תרגיל: אז

$$x + C_1 = \int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = \cot(z/2)$$

זכרו להחליף המשתנים!

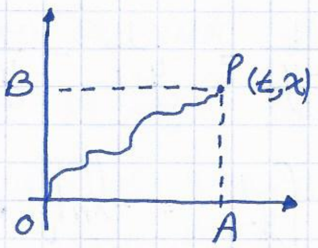
זהות טריג.

אז $x - \cot(z/2) = C_1$

אז! $x - \cot\left(\frac{y-x}{2}\right) = C$ פתרון למשוואה, ונזכור גם את הפתרונות הסינגולריים.

תרגיל: לכל נקודה כלשהי (x,t) על עקום העובר בראשית מעבירים ישרים מקבילים לצירים. מצאו את העקום המחלק את המלבן הנוצר ע"י שני הישרים שהעברנו והצירים לשני תחומים ששטחו של אחד מהם גדול פי 3 משטחו של השני.

פתרון:



כך ש

$$3S_{OBP} = S_{OAP}$$

$$3\int_0^t x(s)ds = xt - \int_0^t x(s)ds$$

$$4\int_0^t x(s)ds = xt \xrightarrow[t]{\text{נגזור לפי}} 4x = x't + x \longrightarrow 3x = x't \longrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{3}{t}$$

אז $\ln|x| = 3\ln|t| + C_1$ אז $x = C_1 t^3$.