11/6/14

שיעור [illegible]

<u>תזכורת:</u> אנחנו עוסקים ביציבות ויציבות אסימפטוטית של פתרונות. חיפשנו על פונקציות ליאפונוב מהצורה $V=\frac{1}{2}\langle x,Px\rangle$ ואז $\dot V=\frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle$

<u>ראינו:</u> $Q=PA+A^TP$

אם A בעלת ע"ע $Re\lambda_i<0$ אז המערכת $\dot x=Ax$ יציבה אסימפטוטית בנקודת השבת, ורצינו למצוא תנאים על הפונקציה ליאפונוב שנובעים מהמשפט. כלומר רצינו $P>0$ וגם $Q<0$. זו שאלה באלגברה לינארית.

נסמן $M_{n\times n}$ מרחב המטריצות $n\times n$ מעל $\mathbb{R}$; יהי $L: M_{n\times n}\to M_{n\times n}$ האופרטור שמעביר את P ל-Q, ברור ש-L לינארי...

<u>טענה:</u> $spec L\subseteq\{\lambda_i+\lambda_j \mid \lambda_i,\lambda_j$ ע"ע של $A\}_{i\neq j}$ = קבוצת הע"ע של L.

<u>מסקנה:</u> אם $Re\lambda_i<0$ אז $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$ ולכן L הפיך כי אפס אינו ע"ע של L, ולכן L איזומורפיזם. כלומר אם A כזו, אז המשוואה $PA+A^TP=Q$ פתירה לכל Q קבוע, ובאופן יחיד.

<u>הערה:</u> לטרנספורמציה L יש ~~[illegible]~~ תת-מרחב שמור שהוא המטריצות הסימטריות כלומר הסימטריות עוברות לעצמן.

<u>הוכחה:</u> נניח כי P ו"ע של L אז $PA+A^TP=\mu P$ אז מקיים $P(A-\mu I)+A^TP=0$ ולכן $P(A-\mu I)^k=(-A^T)^kP$ וזה לכל $k\geq 0$.

$\boxed{\text{הערה מעמוד הבא...}}$

ולכן לכל פולינום $f(x)$ מקיים $Pf(A-\mu I)=f(-A^T)P$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ נניח כי $\mu\neq\lambda_i+\lambda_j$ בשלילה ~~[illegible]~~ ונגיע לסתירה ש-μ ע"ע של L, עם ו"ע P.

נתבונן בע"ע של $A-\mu I$ אלו הע"ע שלה הם $\lambda_i-\mu$ ולמטריצה $-A^T$ יש ע"ע מהצורה $-\lambda_j$ לכל j. ~~[illegible]~~ מההנחה כי $\mu\neq\lambda_i+\lambda_j$ ולכן אלו קבוצות זרות. כלומר $spec(-A^T)\cap spec(A-\mu I)=\emptyset$

<u>למה:</u> נתונות מטריצות G,D בעלות ספקטרום זר, כלומר אין להם ע"ע משותפים, אז קיים פולינום φ כך ש-$\varphi(D)=0$ וגם $\varphi(G)=I$.

<u>הוכחה בהמשך:</u> להשתמש במשפט קיילי המילטון/פירוק ספקטרלי.

דוגמא למעבר האינדוקציה

$P(A-\mu I)^2=P(A-\mu I)(A-\mu I)=-A^TP(A-\mu I)=(-A^T)^2P$

מהלמה נובע שקיים φ כך ש-

$\varphi(A-\mu I)=0$

וגם $\varphi(-A^T)=I$

אז $P=0$! סתירה

אבל P ו"ע!

11/6/14

המשך שיעור 10

⊖ אז לכל Q אפשר למצוא P כזה, כי L הפיך. אבל נרצה שQ תהיה מוגדרת שלילית! P מוגדרת חיובית, עם הוא סימנו.

נסמן W את תת-מרחב כל המטריצות, זה תת מרחב שמור תחת ההעתקה L כמובן...

כלומר אם $P\in W$ אז $L(P)\in W$

$$L(P) = PA + A^TP$$

נשים לב שL הוא על W אז $L(W)=W$.

נסמן $k\subseteq W$ כל המטריצות המוגדרות חיובית (זה לא תת מרחב...)

מקיים ש k הוא חרוט cone בW כלומר אם $A\in k$ אז $\lambda A\in k$ לכל $\lambda>0$.

כמו כן אם $A,B\in k$ אז $A+B\in k$. [כלומר קבוצה קמורה...]

כמובן ש $-k$ זה קבוצת המטריצות המוגדרות שליליות. נרצה $P\in k$ כך ש $L(P)\in -k$.

מטרה: נתונה מטריצה A כך ש $Re\lambda_i<0$ למצוא את פונקציית ליאפונוב שמוכיחה יציבות

משפט: $L^{-1}(-k) \supseteq k$ ומכאן נקבל שלכל $Q\in -k$ כלומר מוגדרת שלילית קיימת יחידה $P\in W$ כך ש $PA+A^TP=Q$, ומתקיים ש $P\in k$ מהמשפט. לכן מספיק שנפתור את המשוואה $PA+A^TP=Q$ ונקבל הפתרון, עבור $Q<0$ כלשהי. (פשוט נבחר $Q<0$)

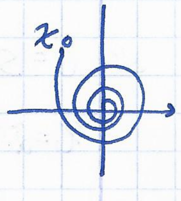
$Re\lambda_i<0$

כלשהי: נפתור המשוואה ונחלץ את P, ומכאן מצאנו את פונקציית ליאפונוב עבור A (כמו שרצינו)

הוכחת המשפט: תהי $Q\in -k$ כלשהי ונמצא P המקיים $Q=PA+A^TP$ ונראה כי $P\in k$. נסמן $V=\frac{1}{2}\langle Px,x\rangle$ תבנית ריבועית. נתבונן במערכת $\dot{x}=Ax$ ומההנחה על A מקיים שזו מערכת יציבה אסימפטוטית. מכאן, שלכל פתרון $x(t)$ מקיים $x(t)\xrightarrow{t\to\infty}0$. נתבונן ב$\dot{V}$ ראינו כי $\dot{V}=\frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle$.

כעת נראה כי $P>0$ ע"י שנראה כי $V(x_0)>0$ לכל $x_0\neq 0$. יהי $x_0\in\mathbb{R}^n$ ונתבונן בפתרון למערכת $\dot{x}=Ax$ עם תנאי התחלה x_0, נסמנו $x(t)$.

לפי מהמשפט היסודי לחדו"א מקיים



$$V(x(t))-V(x_0)=\frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\langle Q(x(s)),x(s)\rangle}_{\text{כי זו הנגזרת}}\,ds$$

$$V(x_0)=\underbrace{V(x(t))}_{\text{הולך לאפס כש } t \text{ הולך לאינסוף.}}\underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\langle Qx(s),x(s)\rangle}_{\text{זו פונ' שלילית}}\,ds}_{\text{חיובי! הולך וגדל כש } t \text{ גדל.}} \xrightarrow{t\to\infty} >0$$

קיבלנו.

הראנו כי V חיובית

קיבלנו.

11/6/14

המשך שעור 10

משפט: אם $\dot{x}=Ax$ יציבה אסימפטוטית, ואז Q מטריצה מוגדרת שלילית כלשהי, למשל $Q=-I$, אז נפתור $PA+A^TP=Q$ עבור P, ואז P תגדיר את פונקצ"ל ליאפונוב ע"י תבנית ריבועית.

מידע למבחן: (כמו תמיד, לפחות מתוך עבר של המוד'...)

- 3 שאלות, 5 שעות, לבחור 4 מתוך. (אולי בונוס גם)
- מי שיודע הטכניקה יקבל 70,80 בקלות, להגיע ל100 צריך לדעת התאוריה.
- אין דפי נוסחאות, חומר סגור.
- משפטים שלמים מתשובות, אבל יש מבחן
- אולי יהיה תרגיל מהשיעורי בית.

דוגמא: נתונה המשוואה $\dot{x}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-2\end{pmatrix}x$ ומתקיים $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=-2$

לכן זו נקודה של יציבה אסימפטוטית. נבחר שלילית $Q=-I$ ונפתור המשוואה
$PA+A^TP=-I$ כאשר P סימטרית אז $P=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ ולכן

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

נגיע למערכת המשוואות הלינארית כמו מבחן ומוצאים את P שמגדירה את פונ' ליאפונוב שקיימת כי המערכת יציבה ואפס יציבה אסימפטוטית.

ויצא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{7}{12}\end{pmatrix}$ ונבדוק $P>0$ מוגדרת חיובית.

לכן: $V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\langle Px,x\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_1^2+\frac{7}{12}x_2^2+\frac{2}{3}x_1x_2\right)$.

> תזכורת לבדוק מי שה... נאמר ש P סימטרית מוגדרת חיובית אם $\langle Px,x\rangle>0$ לכל $x\neq 0$. מספיק שכל הע"ע של P הם חיוביים. כיוון שהם ממשיים כי P סימטרית
>
> יש גם את מבחן סילבסטר על מינורים ראשיים מוגדרים חיוביים.

תרגיל: נתונה מערכת
$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\sin x\end{cases}$$
מה הן נקודות השבת ויציבותן?

נקודת שבת: $y=0$, $0=\sin x$ אז
$x=2\pi k+\pi,\ 2\pi k$

נפרק למקרים:

⊕ $x=2\pi k$, $y=0$, נעשה קירוב לינארי למערכת ליד השבת שלנו (...)

לומר
$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x\end{cases}$$
זו מערכת לינארית המהווה הקירוב למערכת שלנו.

וזו המערכת $\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}x$ ואז $\lambda_{1,2}=\pm i$

וזה **בעיה**! השבת של הקירוב בעצם מערכת לינארית לא מוגדרת בעובדה ש $Re\lambda=0$. לא ניתן להסיק ממנו קירוב לינארי...

> נשים לב ש- $\sin x$ עבור ליד הנקודה $2\pi k$
>
> $-\sin(2\pi k+\delta)=-\delta+O(\delta^2)$

11/6/14

המקרה השמרני

המקרה הפשוט

אם עדין נרצה להסיק יציבות בנקודה הזו.

כאמור זו משוואת ניוטון
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -U'(x) \end{cases}$$
כאשר $U(x) = -\cos x$.

ונאמר אנחנו יודעים שלמשוואה הזו יש חוק שימור שאומר:

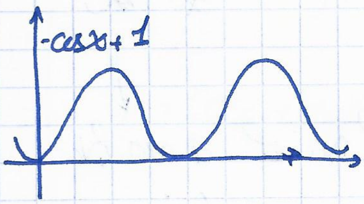
$$V(x,y) = \underbrace{1}_{\text{סתם קבוע}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}y^2}_{\text{אנרגיה קינטית}} + \underbrace{U(x)}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}} \equiv \text{Const} \longmapsto \dot{V} \equiv 0$$

$\boxed{\text{לאורך פתרונות}}$

על כל פתרון.

ברור שהיציבות לא אסימפטוטית כי זה מעגלים... חוק שימור אנרגיה, הוא יעזור להוכיח זאת

בנקודה $x = 2\pi k$ מקיים שהפונקציה $-\cos x + 1$ יש מינימום מקומי.



לכן $V(x,y)$ מוגדרת חיובית בסביבת $(2\pi k, 0)$

לכן מלמה ליאפונוב $(2\pi, 0)$ היא נקודה של יציבות.

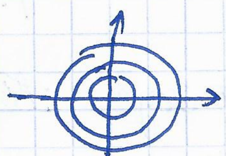
(2) עבור $x = \pi + 2\pi k$; $y = 0$. נעשה קירוב ליניארי ע"י $A = Df(x_0)$

כמו מקודם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ וזו מטריצה המקיימת $\lambda_1 = \pm 1$ ולכן זה אוכף לכן לא יציב המערכת הליניארית לכן מלמת קירוב גם המערכת לא יציבה.

עוד דוגמא:
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^n \end{cases}$$
עבור n טבעי. קל לראות ש $(0,0)$ נקודה שבת למערכת.

אם $n=1$ זו מערכת ליניארית

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$



$V = x^2 + y^2$

$\dot{V} \equiv 0$

<u>אם $n > 1$ אי-זוגי:</u> זו נקודה שבת יציבה

<u>אם n זוגי</u> זו נקודה שבת לא יציבה...

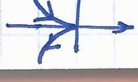
ננסה קירוב ליניארי: $Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז $\lambda_{1,2} = 0$ ואז אי אפשר להשתמש בלמת קירוב ליניארי, מה גם שזו לא מערכת ליניארית יציבה...

<u>אם n אי-זוגי:</u> זו מערכת ניוטון שוב! $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -U'(x)$

כאשר $U(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ לכן נבנה $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ וזה חוק שימור למערכת, כלומר זה קבוע. אם n אי-זוגי אז $n+1$ זוגי לכן $V(0,0)$ זה מינימום מקומי של V. כמו כן $\dot{V} \equiv 0$ כי V קבועה על פתרונות. לכן V פונק' ליאפונוב לכן זו נקודה יציבה.

בבחינה נקודה החלה על הגובה $V = 0$ ונראה מה קורה שמה. נבדוק

<u>אם n זוגי:</u> 2 למשל אז $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^3}{3}$ חוק שימור על פני הפתרונות. נתעניין בקווי גובה של V



לא יציב =

12/6/14

תרגול שבוע 10:

תרגיל: $\begin{cases}\dot{x} = 3y-2x^3 \\ \dot{y} = 2x-3y^3\end{cases}$ ונמצא $(0,0)$ זו נקודת שבת. ונבדוק יציבות.

נעשה קירוב לינארי לסביבה ונקבל

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x \longmapsto \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}\, i$$

אבל $Re\lambda_i = 0$ ולכן אין לנו שום מידע על סמך הקירוב הלינארי. אז מה נעשה? ננחש פונ' ליאפונוב/צ'טאייב, זה קשה! ננחש מקדמים לא ידועים

$V = [ax^2+2bxy+cy^2]\frac{1}{2}$. נבדוק מה $\dot{V}$.

$$\dot{V} = (ax+by)(-3y-2x^3)+(bx+cy)(2x-3y^3) = \underbrace{-3by^2+(2c-3a)xy+2bx^2}_{\text{סדר 2}} \underbrace{-2ax^4-2bx^3y-3bxy^3-3cy^4}_{\text{סדר 4, זניח בסביבת אפס לעומת סדר 2.}}$$

אבל סדר 2 לא אפס לנו, הוא לא יהיה שלילי לא משנה מה נעשה... (תזכורת: רוצים $\dot{V}<0$) ולכן נרצה להיפטר מסדר 2, כי לא נצליח לגרום לו להיות שלילי תמיד בגלל איך שהוא בנוי...

אם נבחר $b=0$; $2c=3a$ ואז סדר 2 יתאפס. נניח $a=2, c=3$.

ואז $\dot{V} = -4x^4-9y^4$ וזה אכן מקיים $\dot{V}<0$ ואז

$V = [2x^2+3y^2]\frac{1}{2}$ וזו פונ' מוגדרת חיובית, ולכן מצאנו פונ' ליאפונוב

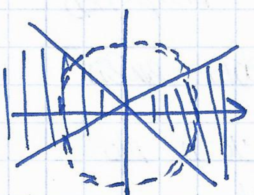
ולכן זה יציבות אסימפטוטית.

שיטת צ'טאייב

תרגיל: $\begin{cases}\dot{x} = x^3+2xy^2 \\ \dot{y} = x^2y\end{cases}$ הוכח שנקודת שבת אינה יציבה. (הנקודה $(0,0)$)

יש עוד נקודות

פתרון: אין טעם בקירוב לינארי, כי כל האיברים מסדר 2 ומעלה... ולכן ננחש פונקציית צ'טאייב.



נבחר $V = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$, אז $|x|>|y| \longleftrightarrow V>0$

נסמן $U = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \varepsilon^2,\ V(x,y)>0\}$

נבדוק מהי $\dot{V}$ על פני U. מקבלים: $\dot{V} = x(x^3+2xy^2)-y(x^2y)$

ואז $\dot{V} = x^4+x^2y^2 \longrightarrow \dot{V} = x^2(x^2+y^2) > 0$ על U

ולכן V פונקציית צ'טאייב, ולכן הנקודה לא יציבה.

12/6/14

המשך תרגול 10

תרגיל: $\begin{cases}\dot x = -x-y-xy^2\\ \dot y = 2x-y-y^2\end{cases}$ מהי היציבות בנקודה $(0,0)$? השתמשו בפונ' ליאפונוב.

נתבונן בקירוב ליניארי, $\dot x = \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}}_{A} x$ ואז הפולינום האופייני הוא $\lambda^2+2\lambda+3=0$

ולכן $\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i$ ולכן המערכת הזו יציבה ולכן גם המערכת המקורית יציבה!

נחפש פונ' ליאפונוב למערכת הליניארית, והיא תהיה גם למערכת המקורית. אז נמצא פונ' ליאפונוב למערכת הליניארית:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}[ax^2+2bxy+cy^2] \longmapsto \underbrace{a,c>0\ ,\ ac-b^2>0}_{\text{זה מבטיח ש } V \text{ מוגדרת חיובית.}}$$

בדומה לשיעור את המערכת הליניארית הזו ומוצאים המקדמים. אנחנו יודעים שזה פתרון.

$$\dot V = (ax+by)(-x-y) + (bx+cy) =$$
$$= x^2(-a+2b)+xy(-a-2b+2c)+y^2(-b-c)$$

ואז נדרוש ש $\dot V$ יהיה מוגדרת שלילית (נגדיר $Q=-I$ כמו בשיעור) ואז נקבל:

$$\begin{cases}-a-2b+2c=0\\ -a+2b=-1\\ -(b+c)=-1\end{cases} \longmapsto \begin{cases}a=\frac{4}{3}\\ b=\frac{1}{6}\\ c=\frac{5}{6}\end{cases}$$

ולכן סה"כ מצאנו פונ' $0<V=\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{5}{6}y^2$ ו $\dot V<0$.

12/6/14

המשך הרצאה 10

יציבות/יציבות אסימפטוטית

הגדרה: עבור בעיית תנאי התחלה אוטונומית $\dot x = f(x)$ ונניח כי $f(\xi)=0$, אז $x\equiv\xi$ פתרון קבוע למערכת שלו. מה יהיה אם נבחר תנאי התחלה קרובים ל-ξ. האם הפתרון ישאר קרוב ל-ξ, יתכנס ל-ξ או יתרחק מ-ξ? (זה יציבות...)

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

[דיברנו בהגדרה של יציבות/יציבות אסימפטוטית בשיעורים הקודמים]

משפט ליאפונוב:

⊖ עבור המערכת $\dot x = Ax$ אז $x\equiv 0$ נקודה של יציבה אמ"מ לכל λ ע"ע של A מתקיים $Re\lambda<0$ או $Re\lambda=0$ והריבוי הגאומטרי של λ שווה לריבוי האלגברי, שלו.

⊖ המערכת $\dot x = Ax$ יציבה אסימפטוטית אמ"מ $Re\lambda<0$ לכל λ ע"ע של A.

12/6/14

המשך דוגמאות

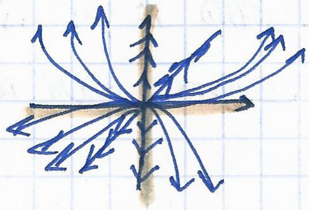
דוגמאות:

① $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ אז $P_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$

אז $\lambda_{1,2} = 1,2$ שניהם חיוביים ממשיים, אז

זו נקודת שבת לא יציבה לפי המשפט. וזה ברור, כי אם ניקח

הוקטורים העצמיים $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הפתרונות חיוביים ומתרחקים מנקודת השבת.



$\boxed{\text{מישור הפאזה}}$ ברור שאין יציבות, הפתרונות יוצאים מכל כיוון.

② $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 \end{cases}$ אז $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ ואז $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$

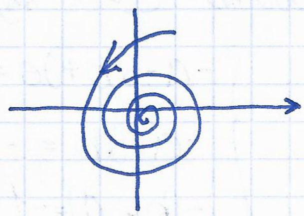
ואז $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. זה נקרא מוקד יציב!

(בפרט יציב...) כי $Re\lambda_1, Re\lambda_2 < 0$ זה אפילו יציב אסימפטוטית.

הציור הוא ספירלה. נתבונן בנקודה $(0,1)$ ונתעניין

בנגזרת $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

הצבת הנגזרת הזו מראה את כיוון הספירלה.

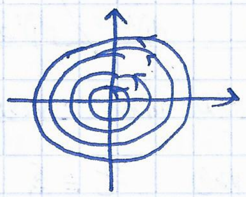


③ $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$ אז $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\lambda_{1,2} = \pm i$ אז $Re\lambda = 0$

אבל ע"ע שונים המטריצה לכסינה, לכן הריבוי הגאומטרי שווה לריבוי האלגברי!

לכן יש יציבות אבל לא אסימפטוטית...

$\boxed{\text{סיכוי טוב שהכיוון הפוך}}$



⊖ מה לגבי מערכות לא לינאריות?

לינאריזציה של מערכת לא לינארית:

עבור מערכת משוואות אוטונומית $\dot{x} = f(x)$ כאשר $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ותהי x_0 נקודת שבת, כלומר $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. נפתח את f לטיילור:

$$\dot{x} = f(x_0) + (Df)_{x_0}(x - x_0) + O(x^2)$$

ומאחר ש-x_0 נקודת שבת אז $f(x_0) = 0$ אם $(Df)_{x_0} \neq 0$ נתבונן במערכת

$\dot{z} = (Df)_{x_0} z$ וזו נקראת הלינאריזציה של $\dot{x} = f(x)$.

תרגיל: מצאו לינאריזציה של $\begin{cases} \dot{y}_1 = \tan y_1 + (y_2 - 1)^2 - 1 \\ \dot{y}_2 = \cos^2 y \cdot (y_2 - 1) \end{cases}$ עבור הנקודה הקריטית $(\pi/4, 1)$

12/6/14

המשך תרגול 10

פתרון: נחשב הנגזרת של f לפי y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 y_1} & 2y_2 - 2 \\ -(y_2-1)2\sin y_1 & \cos^2 y_1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}\left(\tfrac{\pi}{4},1\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

זה הנגזרת של f...

לכן המערכת הלינארית המתאימה הוא

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} z$$

משפט: עבור $A = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y_0}$ המקיימת שלכל λ ע"ע שלה, $Re\lambda<0$ אז נקודת השבת x_0 יציבה ויציבה אסימפטוטית במערכת הלא לינארית.

אם קיים λ ע"ע של A כך ש $Re\lambda>0$ אז x_0 לא יציבה ובפרט לא יציבה אסימפטוטית.

אם מתקיים $Re\lambda\le 0$ לכל λ וקיים λ' כך ש $Re\lambda'=0$ אז לא ניתן לומר...

בדוגמא שלנו הע"ע הם 2 ו-$\frac{1}{2}$ לכן אין יציבות בנקודה $(\frac{\pi}{4},1)$.

תרגיל: חקרו יציבות של נקודות השבת עבור המערכת

$$\begin{cases} \dot{x} = 4-2y \\ \dot{y} = 12-3x^2 \end{cases}$$

פתרון: נבצע לינאריזציה למערכת:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6(\pm 2) & 0 \end{pmatrix}$$

דומה זה תלוי באיזה נקודה אנו בודקים

מהיכן נמצא נקודות השבת:

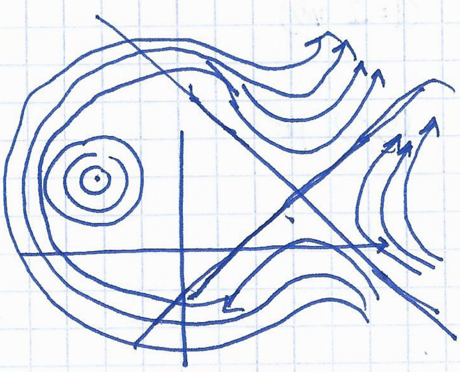
$$\begin{cases} 4-2y=0 \\ 12-3x^2=0 \end{cases} \mapsto \begin{matrix} x=\pm 2 \\ y=2 \end{matrix}$$

נחשב ע"ע למטריצה:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 \pm 24 \mapsto \lambda^2 = \pm 24$$

לכן או $\pm\sqrt{24}$ או $\pm\sqrt{24}\, i$

$\boxed{x=2}$ $\boxed{x=-2}$



לכן בנקודה $(2,2)$ אין יציבות כי זה אוכף.
עבור $(-2,2)$ לא ניתן לומר על המערכת המקורית.

פונקציות ליאפונוב:

עבור $\dot{x}=f(x)$! $x\equiv 0$ נקודת שבת אז נגדיר פונ' ליאפונוב להיות $V:\overline{B_r}\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות המוגדרת חיובית! $\dot{V}$ מוגדרת אי-חיובית.

כאשר $\dot{V}$ (נגזרת מלאה) השלשה של גזירת V מוגדרת על x, כלומר

$$\dot{V}(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(z)\cdot \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}(z)}_{f_i(z)}$$

למשל"ר.

(נאמר כי $V\ge 0$ אם $V(0)=0$ ובכל מקום אחר V חיובית ממש.)

אם $\dot{V}<0$ לומר שלילית ממש אז V נקראת ליאפונוב בהחלט.

משפט: עבור $\dot{x}=f(x)$ ו-$x=0$ נקודת שבת. אם קיים פונ' ליאפונוב אז $x=0$ יציבה, ואם קיימת ליאפונוב בהחלט אז $x=0$ יציבה אסימפטוטית.

12/6/14

המשך תרגול

תרגיל: קבעו יציבות של הנקודה (0,0) עבור המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \dot x = -x+y+xy \\ \dot y = x-y-x^2-y^3 \end{cases}$$

פתרון: לאחר ליניאריזציה מקבלים

$$\dot x=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}x$$

$P_A(\lambda)=\lambda^2+2\lambda$;

לכן ע"ע הם $\lambda_{1,2}=0,-2$; לכן הליניאריזציה לא עוזרת לנו; כי יש ע"ע עם Re אפס ו~~שלילי~~ וכל השאר שליליים ממש.

לכן נחפש פונ' ליאפונוב. איך מחפשים? נחש ש V היא תבנית ריבועית

$V=ax^2+2bxy+cy^2$ ונדרוש ש $0\le V$; $\dot V\le 0$.

מקיים $\dot V=2ax\dot x+2by\dot x+2bx\dot y+2cy\dot y$ $\longleftarrow$

$$\dot V=(2ax+2by)(-x+y+xy)+(2bx+2cy)(x-y-x^2-y^3)$$

ונרצה להפוך את $\dot V$ להיות שלילית.

V ; חיובית. נפריד לאיברים של סדר 2 ; של סדר 3 ומעלה.

$$\begin{cases} x^2(2b-2ab)-y^2(2b-2c)+xy(2a-4b+2c) \\ xy^2(2b)+x^2y(2a-2c)+x^3(-2b) \\ y^3(-2bx+2cy) \end{cases}$$

ונרצה שסדר 3 יתאפס כי הוא יקבע סימן כאן.

לכן $b=0$, $c=a$. לכן נבחר $a=1$ ונקבל $\dot V<0$. ;

$\dot V=-2a[(x-y)^2+y^4]$ וזה שלילי!

$V=x^2+y^2\ge 0$ מועמדת חיובית.

פונ' ליאפונוב מוכרת... הנורמה בריבוע

לכן (0,0) יציבה אסימפטוטית.