

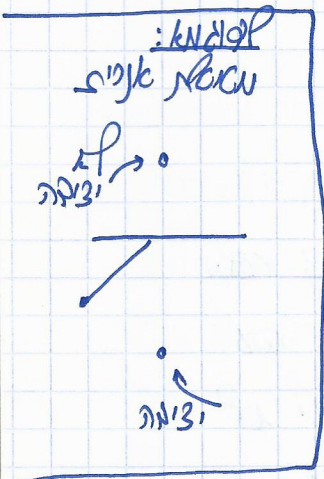
5/6/4

15 נקודות

השאלה: בשרי חומר, את מה אנחנו צריכים לדעת?

פונקציה: $U(q)$

כאשר U היא פונקציית פוטנציאל. מידה נכונה וקורה של $\dot{q} = p$
 $\dot{p} = -\frac{\partial U}{\partial q}$
 למעשה זהו הדיבר של ז'אנטי. ומקיים
 $(p_0, q_0) \leftrightarrow p_0 = 0; \frac{\partial U}{\partial q}(q_0) = 0, q_0$ נקודה קיצונית



נסמן פונקציית האנרגיה: $H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + U(q)$
 אם $(0, 0)$ נקודה של $(U(0) = 0)$ (בהנחה ש...)

אם $q=0$ היא מניחה מקומה של U

אם $(0, 0)$ נקודה של ז'אנטי כי $H = 0$

(חוק שימור אנרגיה...) חלק אחר של H אחר

פונקציית אנרגיה הולכת וגדלה בעת הזמן

$V(p, q) = H(p, q) - H(0, 0)$
 $V(0, 0) = 0$

הפונקציה $V(0, 0)$ נקראת כי V משתנה חיוני כי $(0, 0)$ מניחה
 של H זהו למעשה.

$\dot{V} \leq 0$ נקראת $\dot{V} \equiv 0$ נקראת

אם אנחנו רוצים להבין את הפונקציה $V(0, 0)$ ז'אנטי, סתם
 לא יזכיר שיש משוואות, מחוץ שימור האנרגיה! צורה המאפשרת לנו
 סדר הקשר את אלה של אנרגיה

אם q מקסימום של U זהו ז'אנטי בקצרה... (זהו חומר של אנרגיה...)

פונקציה של U : $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ הם חסם פונקציה (למשל) והמשפט

כאשר U פונקציה של $q_1, \dots, q_n$. נסמנים: $\dot{q}_i = p_i$
 $\dot{p}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$
 $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + U(q_1, \dots, q_n)$

אנחנו רוצים להבין את המשפט, וזהו (למשל)...

אם U נקראת של q , וכן U נקראת של U

לפונקציה U נקראת
 בהנחה $U(0) = 0$
 אנחנו רוצים להבין את המשפט
 של U נקראת של U

q, p נקראת
 פונקציה של q
 נקראת של U

כאשר U נקראת של q
 נקראת של U
 נקראת של U

5/6/14

המשפט 15

אלה: איך מוכיחים למקרה אחר? [זהו המקרה של המקרה... אבל נראה שזה לא המקרה...]
Chetaev

אם נניח...
כלומר...

נתונה הפונקציה $\dot{x} = f(x)$ כאשר x וקטור מ ממד n : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ונניח כי הנקודה $x=0$ היא נקודה של...
המשפט: פונקציה צ'טאיי $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר $\mathbb{B}_r$ יחידה מסביבה

מסביבה מסביב לנקודה הזו:

- (א) $V(0)=0$
- (ב) קיים מסביבה של 0 קיימת נקודה $\tilde{x}$ כך ש $V(\tilde{x}) > 0$
- (ג) $x \in U$ כאשר $U = \{x \mid |x| \leq \varepsilon, V(x) \geq \delta\}$ כלומר הנקודה שלפנינו חיונית למקרה $V(x) > 0$, ואם $V(x) > 0$ וזה לא $0 < \varepsilon$.

משפט צ'טאיי:

עבור המערכת $\dot{x} = f(x)$ נניח כי $x=0$ היא נקודה של, אז אם קיימת פונקציה צ'טאיי הנקודה של יציבה. יציבה $0 < \varepsilon$

כלל של קיום פונקציה צ'טאיי

הוכחה: נניח $\Delta(U) = \{x \in U \mid |x| \leq \varepsilon, V(x) > 0\}$ ונניח $\tilde{x} \in \text{Int}(U)$

[הנניח U היא תיבה כי V פונקציה צ'טאיי] $0 < V(\tilde{x}_0)$

אז נניח $\delta \triangleq V(\tilde{x}_0)$. נניח $x(t, \tilde{x}_0)$ הפתרון למערכת עם תנאי

התנאי $\tilde{x}_0$. נגדיר $Q = \{x \in U \mid |x| \leq \varepsilon, V(x) \geq \delta\}$. אז Q קרוב

קומפקטית. נניח $\delta = \min_{x \in Q} V(x)$, אז $\delta > 0$ כי V יציבה ויש לה

מינימום, $\delta > 0$ כי Q קרוב $\delta > 0$.

יש $x(t, \tilde{x}_0) \in Q$ כל עוד $|x(t, \tilde{x}_0)| \leq \varepsilon$, כי V קרוב δ

עם הפתרון כי הנקודה חיונית ומסומנת על ידי δ .

$$V(x(t, \tilde{x}_0)) - V(x(0, \tilde{x}_0)) = \int_0^t \dot{V} dz \geq \delta t$$

אם הפתרון V של $x(t, \tilde{x}_0)$ פתרון של מערכת $\dot{x} = f(x)$.

ממילא במידה מתאימה, הפתרון $x(t, \tilde{x}_0)$ ימשיך להיות מסומן Q .

כיון ש $|V(x(t, \tilde{x}_0))|$ ילך וגדל, אז בהכרח $|x(t, \tilde{x}_0)| > \varepsilon$

בזמן מסוי, ולכן הפתרון לא יציב, נגמור.

דוגמה: $\dot{x} = y^3 + x^5$, $\dot{y} = x^3 + y^5$ ונניח $V = x^4 - y^4$ מיוחסת לפונקציה צ'טאיי. ואז

$V(0,0)=0$, וכל ציר x ו y חיונית V חיונית.

איך מוכיחים
אם יציבה?
צריך להראות ש
 ε לא שווה
כעיקרון
נניח δ
כלל של
נניח δ
נניח δ
נניח δ

כלל של
קובע
יש נקודה
קובע δ
למקרה
יחסית
הכלל
נניח δ
נניח δ

15 מ'ל פד

אין קומט דאס צווייטע יאָר נאָכדעם ח'שו"ת. ווערן זיי 8

$$\dot{V} = 4x^3 \cdot \dot{x} - 4y^3 \dot{y} \stackrel{(*)}{=} 4x^3(y^3+x^5) - 4y^3(x^3+y^5) = (x^4-y^4)(x^4-y^4)$$

המחיר...

V הקטנה $\rightarrow$ ΔV קטן

תחילתו. אך 15 בקרוב א' צ"ה.

בניין פונקציות על מרחב וקטורי:

(גלים) איז באקאנט אלס אן אומגאנג (אין אומגאנג און אומגאנג און אומגאנג...)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ עליו $\dot{x} = Ax$ מוגדרת מערכת דינמית

○ נניח ש $\operatorname{Re} \lambda < 0$ ו λ יחיד א k של A (ש A מציגה צורה נורמלית)

($V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$) $\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} \langle P x, x \rangle : P$ symmetric positive definite matrix

כאשר נרצה P סוממים, q שלוש שנים, V קצות משהו חוסמת וקבל

$\dot{V} = (DV)(Ax)$ p חייס אחר ממש חייס, וסו p

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{ij} x_i x_j \quad \text{mno se } \nabla V \quad \text{mno } p \quad p_k$$

קבוע $\nabla V = P_x$ $sk!$

$$\dot{V} = \langle P_x, A_x \rangle \quad \text{mit} \quad \dot{V} = \underbrace{(P_x)}_{\in \mathbb{R}^n} \underbrace{(A_x)}_{\in \mathbb{R}^n} \quad \text{pp}$$
$$\dot{V} = \langle x, P^T A x \rangle = \langle x, P A x \rangle = \langle x, \frac{P A + A^T P}{2} x \rangle = \frac{1}{2} \langle x, Q x \rangle$$
$$Q = PA + A^T P \quad \text{d.h.}$$

ה' כ"ד ע' ו' ה' פ' מ' ק' נ' ר' ש' ת' י' ל' א' ב' ג' ד' ה' ו' ז' ח' ט' י' י"א י"ב י"ג י"ד י"ה י"ו י"ז י"ח י"ט כ' כ"א כ"ב כ"ג כ"ד כ"ה כ"ו כ"ז כ"ח כ"ט ל' ל"א ל"ב ל"ג ל"ד ל"ה ל"ו ל"ז ל"ח ל"ט

כמה ערכי λ אפשריים? $0 < \rho$ $\Rightarrow$ אין $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ $PA + A^T P \leq 0$?

הערה: אצל אמונה של מציצה Q מופיעה תיאור מופיע תיאור מופיע

אם $\dots$ ונניח שיש לנו $P A + A^T P = Q$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \leq \varepsilon & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = G_\varepsilon^{-1} A G_\varepsilon$$

הצד: קו"מ $\rightarrow$ ממוצע G_x ב p

1. Conduct

: 2012

שם: אריאל תאריך: 25.10.20

$$\begin{pmatrix} \lambda & a_{ij} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = A' = G^{-1}AG \quad \text{ep}$$

מבין מבין זה $Ca^{+} Al, Ca$

Sk

[illegible]

5/6/14

הצגת עבודה

הצגת עבודה

נתון $y = G^{-1}x$ כאשר G היא מטריצה $n \times n$ המלאה והיחידה.

אם $\dot{x} = Ax$ אז $\dot{y} = By$ כאשר $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ו- $\lambda_k < -\epsilon$.

אם y הוא וקטור המאופיין

$$V(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leftarrow \begin{matrix} \text{כמות האנרגיה} \\ \text{במערכת} \end{matrix}$$

$$\dot{y}_k = \lambda_k y_k + \sum_{j=k+1}^n b_{k,j} y_j \quad \text{עבור } 1 \leq k \leq n$$

כאשר B היא מטריצה

כאשר $\epsilon > |b_{k,j}|$ ו- $\lambda_k < -\epsilon$

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n y_i \bar{y}_i \right) = \dots$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \bar{y}_i + \sum_{i=1}^n y_i \dot{\bar{y}}_i = \sum_{k=1}^n (\lambda_k y_k + \sum_{j=k+1}^n b_{k,j} y_j) \bar{y}_k + \sum_{k=1}^n (\bar{\lambda}_k \bar{y}_k + \sum_{j=k+1}^n \bar{b}_{k,j} \bar{y}_j) y_k$$

$$= \text{Re} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \bar{y}_k y_k + \sum_{k=1}^n \sum_{j>k} b_{k,j} \bar{y}_k y_j \right) = \sum_{k=1}^n (\text{Re } \lambda_k) |y_k|^2 + \dots$$

כאשר $\text{Re } \lambda_k < -\epsilon$

$$+ \text{Re} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j>k} b_{k,j} \bar{y}_k y_j \right)$$

הנחנו כי $\epsilon > |b_{k,j}|$

נניח $\epsilon > |b_{k,j}|$ ו- $\lambda_k < -\epsilon$. אז $\dot{V} < -\alpha V$ עבור $\alpha = \epsilon - n \cdot \epsilon$.
כלומר $\dot{V} < -\alpha V$ עבור $\alpha > 0$.

$$\text{Re } \lambda_k < -\epsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^n |b_{k,j}| |y_k| |y_j| \leq \epsilon \sum_{k=1}^n |y_k| |y_j| = \epsilon \sum_{i=1}^n |y_i|^2$$

הנחנו כי $\epsilon > |b_{k,j}|$

$$\leq \epsilon \cdot n \sum_{i=1}^n |y_i|^2$$

אם $\epsilon > n \cdot \epsilon$ אז $\alpha > 0$

$$\dot{V} < -\alpha \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + n \cdot \epsilon \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \Rightarrow \epsilon n < \alpha$$

אם $\epsilon > n \cdot \epsilon$ אז $\alpha > 0$

$$V = \sum_{i=1}^n |y_i|^2$$

אם $\epsilon > n \cdot \epsilon$ אז $\alpha > 0$ ו- $\dot{V} < -\alpha V$ ו- $V(t) \leq V(0) e^{-\alpha t}$

הנחנו כי $\epsilon > |b_{k,j}|$ ו- $\lambda_k < -\epsilon$. אז $\dot{V} < -\alpha V$ עבור $\alpha > 0$.

5/6/14

תרגיל 15

אנחנו יודעים את המערכת $\dot{x} = Ax + |x|/\alpha(x)$ כאשר $\alpha(x)$ היא פונקציה חיובית, ויש לנו $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$ וכן $\operatorname{Re} \lambda < 0$ לכל הערך העigen של A .

אנחנו רוצים להוכיח שהמערכת $\dot{x} = Ax + |x|/\alpha(x)$ היא סטבילית. נגדיר $V = \sum |y_i|^2$ כפונקציית ליאפונוב.

אנחנו רוצים להוכיח שהמערכת $\dot{x} = Ax + |x|/\alpha(x)$ היא סטבילית. נגדיר $V = \sum |y_i|^2$ כפונקציית ליאפונוב. נגדיר $V(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2$ כפונקציית ליאפונוב.

נחשב את $\dot{V} = \langle \nabla V, Ax + |x|/\alpha(x) \rangle$. נגדיר $V(y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^2$ כפונקציית ליאפונוב.

$\dot{V} = \langle \nabla V, Ax + |x|/\alpha(x) \rangle =$

$$\langle \nabla V, Ax \rangle + \langle \nabla V, |x|/\alpha(x) \rangle$$

החלק הראשון $\langle \nabla V, Ax \rangle$ הוא פשוט $\langle Ax, x \rangle$ כי $\nabla V = 2x$. החלק השני $\langle \nabla V, |x|/\alpha(x) \rangle$ הוא $2|x|/\alpha(x)$ כי $\nabla V = 2x$.

נניח $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם הערכים העigen של A . אז $\langle Ax, x \rangle = \sum \lambda_i |x_i|^2 \leq (\max \operatorname{Re} \lambda_i) \|x\|^2$.

$$\langle \nabla V, |x|/\alpha(x) \rangle = \langle 2x, |x|/\alpha(x) \rangle = 2|x|/\alpha(x) \|x\| = 2|x|^2/\alpha(x)$$

אנחנו רוצים להוכיח שהמערכת $\dot{x} = Ax + |x|/\alpha(x)$ היא סטבילית. נגדיר $V = \sum |y_i|^2$ כפונקציית ליאפונוב.

$$\dot{V} \leq 2|x|^2 (\max \operatorname{Re} \lambda_i) + 2|x|^2/\alpha(x)$$

כאשר $\alpha(x) \rightarrow 0$ כ- $|x| \rightarrow 0$.

אנחנו רוצים להוכיח שהמערכת $\dot{x} = Ax + |x|/\alpha(x)$ היא סטבילית. נגדיר $V = \sum |y_i|^2$ כפונקציית ליאפונוב.