המשך תרגול 13

21/5/14

המשך תרגיל:

שלב א': (פתור עבור $\mu=0$) אזי $\dot{x}=x^2$; $x(0)=1$. לכן $\frac{\dot{x}}{x^2}=1$

לכן מאינטגרציה $x=\frac{1}{1-t}$. (כמובן $|t|<1$)

שלב ב': נגזור לפי μ את המערכת ונקבל $Z(t)=\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}(t)$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial \mu}=2x\frac{\partial x}{\partial \mu}+tx^3+\mu\cdot t\cdot 3x^2\frac{\partial x}{\partial \mu} \; ; \quad \frac{\partial x(0)}{\partial \mu}=1$$

לכן קיבלנו המד"ר:

$$\dot{z}=\frac{2}{1-t}\cdot z+\frac{t}{(1-t)^3}+0$$

הצבנו ב $x=\frac{1}{1-t}$ ...

$Z(0)=1$! אז נפתור את המד"ר הזו, זו מד"ר לינארית אז אפשר גורם אינטגרציה או וריאצית מקדמים...

$$z=\frac{-t}{(1-t)^2}-\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^2}+(1-t)^{-2}$$

עשינו גורם אינטגרציה והצבת תנאי ההתחלה.

ואז מציבים כמו שצריך לקבל את הקירוב הלינארי..

אפס זה פתרון תנאי התחלה

שיעור שבוע 14

28/5/14

תזכורת: אנו עוסקים בתורת היציבות, ובפרט יציבות של פתרונות למד"ר.

1 משפט: (יציבות של מערכת לינארית)

אם $\dot{x}=Ax$, ומתעניין בנקודת השבת $x_0\equiv 0$. אז הפתרון $x_0\equiv 0$ יציב אסימפטוטית אמ"מ לכל λ_i ע"ע של A מקיים $Re\lambda_i<0$, והפתרון $x_0\equiv 0$ יציב אמ"מ $Re\lambda_i<0$ או $Re\lambda_i=0$ וגם λ_i "פשוט למחצה" כלומר ריבוי גאומטרי ואלגברי של λ_i שווים במטריצה A.

יציבות אסימפטוטית זה שגם יש התכנסות לנקודת השבת באינסוף...

2 משפט: (יציבות לפי קירוב לינארי) ← [לפי דעתי זה המשפט הראשון המעניין בקורס]

נתונה המערכת $\dot{x}=f(x)$ ופתרון נקודת שבת x_0 בה"כ $x_0\equiv 0$. אז $f(x_0)=0$ כי זו נקודת שבת ונתבצע שאפשר. לפי משפט טיילור $f(\vec{x})=Ax+o(|\vec{x}|)$ ובמקרה זה מספיק שנתבונן במערכת הלינארית $\dot{x}=Ax$ ונקודת השבת $x_0\equiv 0$, אם אם $\dot{x}=Ax$ יציבה אסימפטוטית אז גם $\dot{x}=f(x)$ יציבה אסימפטוטית בנקודת השבת $x_0\equiv 0$. אם קיים i כך ש λ_i של A (ע"ע הקירוב הלינארי) מקיים $Re\lambda_i>0$ אזי המערכת $\dot{x}=f(x)$ מקיימת ש x_0 אינה נקודת שבת יציבה!

אם $Re\lambda_i\leq 0$ לכל λ_i וקיים לפחות רק ש $Re\lambda_i=0$, אז אי אפשר לדעת...

זו התוצאה לשיעורים הקודמים. בהמשך נוכיח אותה

כמובן שזה בה"כ $x_0\equiv 0$ אחרת נזיז מערכת הצירים

ראינו תנאי לכך במשפט הקודם...

כמו במד"א! אם מטריצת ההסיאן של הפונקציה, קשה לדעת מינימום/מקסימום/אוכף. אם הנגזרת הפונקציה זה קשה

3 פונקציית Leiaponov ← זה בשלב אחר ונדבר בזמן.

(1) אם נתונה המערכת $\dot{x}=Ax$ ונתונים של $x_0\equiv 0$, נעשה החלפת משתנים, $y=G^{-1}x$

ואז $(G^{-1}x)'=G^{-1}Ax$ ← $\dot{y}=G^{-1}AGx$, ואז נבחר G כדי שתג'רדן את A.

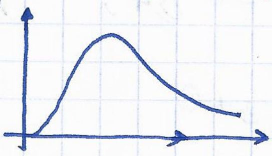
הכפלת שני האגפים ב-G^{-1}

ונראה שהיציבות נשמרת תחת שינוי, ולכן מספיק להוכיח יציבות של צורת ג'ורדן.

זה כי כל הנורמות שקולות... החלפת בסיס זה החלפת נורמה

טענה: נסמן $f(t)=t^k e^{\lambda t}$, אם $Re(\lambda)<0$ אז $|f(t)|<M$ לכל $t\in[0,\infty)$

כי אם $\lambda=\alpha+i\beta$ אז $|f(t)|=|t|^k\cdot e^{\alpha t}$ ולכן משום ש $\alpha<0$ אז



מתפוצ"ת בו סוף חסומה...

מסקנה:

אם לכל λ_i ע"ע של A, מתקיים $Re\lambda_i<0$ מתקיים קיימים $\alpha,k>0$ כך ש $\|e^{At}\|\le k\cdot e^{-\alpha t}$; כלומר הנורמה שואפת לאפס בצורה אקספוננציאלית,

בפרט אם נתון לנו פתרון למערכת $\dot{x}=Ax$ מהצורה $x(t)=e^{At}x_0$ אז יתקיים

$\|x(t)\|=\|e^{At}x_0\|\le\|e^{At}\|\|x_0\|\le ke^{-\alpha t}|x_0|$ ובפרט הפתרון שואף לאפס באינסוף.

הנחת המסקנה שם $Re\lambda_i<0$ לכל i

כעת נראה שיש לנו יציבות, וכך נוכיח את החלק הראשון של המשפט, היציבות האסימפטוטית.

ואז יהי $\varepsilon>0$, נבחר $\delta\le\varepsilon/k$ ואז לכל ~~[illegible]~~ $|x_0|<\delta$ מתקיים $|x(t)|<\varepsilon$ לכל $t\in[0,\infty)$, ובנוסף יש שאיפה $x(t)\to 0$ ולכן יש יציבות אסימפטוטית

וזה מה שהחלק הראשון של המשפט.

הוכחה של הטענה שקיימים החסמים:

$e^{At}=Ge^{J_At}G^{-1}$ כאשר J_A צורת ג'ורדן. ולכן $\|e^{At}\|\le\|G\|\|G^{-1}\|\|e^{J_At}\|$

מקיים שווה לנורמה אופרטורית. ובנוסף מתקיים

$$\underbrace{\|e^{J_At}\|}_{\text{נורמה אופרטורית}}\le C_1\cdot\underbrace{\max_{i,j}|f_{ij}(t)|}_{\text{נורמה אינסוף של מטריצות}}\longmapsto(e^{At})_{i,j}=f_{ij}(t)$$

כל הנורמות שקולות

ואנו כבר יודעים מה משפט האיברי e^{At}, כולם מהצורה $t^ke^{\lambda t}$

ולפי הטענה הם חסומים.

משום שיש כמות סופית של ע"ע של A וכולם מקיימים $Re\lambda_i<0$, אז קיים α כך ש $\alpha>0$! $Re\lambda_i<-\alpha$. ואז מתקיים $t^ke^{\lambda t}=e^{-\alpha t}\underbrace{(t^ke^{(\lambda+\alpha)t})}_{\text{חסום מהטענה.}}$

ולכן $|t^ke^{\lambda t}|\le M\cdot e^{-\alpha t}$ כנדרש.

לסיכום: את המקרה ש $Re\lambda_i<0$ גורר יציבות אסימפטוטית הוכחנו הרגע. נשלים מהרכיבים הבאים, אבל מחלה נורמת הכיוון ההפוך. אם יש יציבות אסימפטוטית אז $Re\lambda_i<0$

28/5/14

המשך שיעור 14

הוכחת הכיוון הראשון של האמ"מ בעקרון הפשוט של המשפט למערכות ליניאריות

נניח בשלילה ש $Re\lambda_1 \geq 0$ (ועדיין יש יציבות אסימפטוטית) אזי $\lambda_1=\alpha_1+i\beta_1$

ונסמן ξ_1 שהוא הו"ע של λ_1. ξ_1 מגדיר פתרון למערכת $\dot{x}=Ax$

מהצורה $x(t)=e^{\lambda_1 t}\cdot\xi_1$ בבירור... כמובן ש ξ_1 מוגדר עד כדי נורמה,

לכן נבחר תנאי התחלה $\tilde{x}_0=\frac{\xi_1}{a}$ כך ש $|\tilde{x}_0|$ יהיה קרוב מספיק

לאפס. נסמן $x(t,\tilde{x}_0)=e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_0$. ואז $|x(t,\tilde{x}_0)|=|e^{\lambda_1 t}||\tilde{x}_0|$

! $|e^{\lambda_1 t}|=|e^{\alpha_1 t}|$, ונתון $\alpha_1\geq 0$, לכן $|x(t,\tilde{x}_0)|\geq|\tilde{x}_0|$ ובפרט לא שואף לאפס

כש $t\to\infty$. כלומר זו סתירה ליציבות האסימפטוטית, כי קיים פתרון שתנאי ההתחלה

שלו קרוב מספיק לאפס, ועדיין אין שאיפה לאפס של הפתרון, וזו סתירה... לכן קיבלנו

כי $x_0\equiv 0$ נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית אמ"מ לכל λ_i ע"ע של A מתקיים $Re\lambda_i<0$.

הכוונה בשלב הזה שאנחנו יודעים כל פתרון של אפס, ורוצים לשאול מה קורה לפתרונות בסביבה

⊖ כעת נוכיח החלק השני של המשפט. תהי המערכת $\dot{x}=Ax$ ונניח כי $x_0\equiv 0$ פתרון

יציב אמ"מ $Re\lambda_i\leq 0$ ואם $Re\lambda_i=0$ אז λ_i פשוט למחצה.

זה כיוון אחד של האמ"מ

<u>הוכחה</u>: נתבונן במערכת השקולה $\dot{x}=J_Ax$. נניח בשלילה ש $x_0=0$ נקודה יציבה

וקיים ע"ע λ_i שמפר התנאי. אם $Re\lambda_i>0$ אז יש התפוצצות לאינסוף ובפרט לא

יציבות, אם $Re\lambda_i=0$ ויש לו בלוק ז'ורדן לא אלכסוני (כלומר מניחים בשלילה שהוא לא

פשוט למחצה), נסמן $w_1,\dots,w_n$ בסיס ז'ורדן של A, אזי בה"כ $\lambda_i=\lambda$ לכן w_1

ו"ע של λ, לכן w_2 אינו ו"ע של λ אבל כן במבנה ז'ורדן של מההוכחה, אזי

נבחר תנאי התחלה $\tilde{x}_0=w_2$ ונקרב אותו לאפס $\tilde{x}_0=\frac{w_2}{a}$. מהו הפתרון

שנוצר עם התחלה זה? לכן מהיופי של איך מעלים אקספוננט למטריצה נקבל:

$$x(t,\tilde{x}_0)=e^{J_At}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{a}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

הכתיבה של x_0 בבסיס הנ"ל

$x(t,\tilde{x}_0)=(te^{\lambda t}w_1+e^{\lambda t}w_2)\frac{1}{a}$. נראה שהפתרון הזה מפר את היציבות, כלומר לא נשאר

בתוך סביבה של אפס. וזה ברור מההנחה ש $Re\lambda\geq 0$, כי $te^{\lambda t}$ פונקציה לא

חסומה לכן הרכיב של w_1 יהיה התפוצצות, w_1,w_2 בת"ל.

<u>הכיוון השני של האמ"מ</u>: נניח כי $Re\lambda_i<0$ ואם $Re\lambda_i=0$ אז λ_i פשוט למחצה ונוכיח

שהפתרון יציב. ואכן מתקיים עבור המערכת $\dot{x}=J_Ax$, שאם נסמן $f_{i,j}(t)=(e^{J_At})_{ij}$

אז $f_{ij}(t)=\begin{cases}e^{\lambda_i t}t^k & Re\lambda<0\\ e^{\lambda_i t} & Re\lambda=0\end{cases}$ מההנחה על הריבוי.

לכן קיים $k>0$ כך ש $|f_{ij}(t)|<k$

לכל $t\in[0,\infty)$, וזה נובע מהחסימה ושאם $Re\lambda_i=0$ אז $|e^{\lambda_i t}|=1$ $\mapsto \|e^{At}\|\leq k_1 \mapsto \|e^{At}x_0\|\leq k_1\|x_0\|$

29/5/14

המשך שיעור 4

!ולכל ε קטן מספיק הזה, ונקבל יציבות כנדרש. ובכך סיימנו את הוכחת המשפט עבור מערכות לינאריות. ∎

פונקציית ליאפונוב:

עבור המערכת $\dot{x}(t)=f(x)$, ו- $x_0=0$ נקודת שיווי משקל, ותהי $V:\overline{B}_{r,x_0}\to\mathbb{R}$ כך ש- $V\in C^1$

אז היא תקרא פונ' ליאפונוב אם מקיימת:

(א) (מוגדרת חיובית) $V(x)\ge 0$ ו- $V(x)=0$ אמ"מ $x=x_0$

(ב) $0\ge \dot{V}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i(x_1,\dots,x_n)$ לכל $x\in\overline{B}_{r,x_0}$

(ג) אם $\dot{V}=0$ אמ"מ $x=x_0$ אזי V תקרא פונ' ליאפונוב של ממש. (Strict Leapunov)

אינטואיציה: פונקציית ליאפונוב הן פונ' מינ' יורדות על המסלולים של המערכת. כלומר כשמציבים את הפתרון אז היא מונו' יורדת ב t

כדי להוכיח המשפט השני

כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dt}\varphi(\vec{x}(t))=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

וכאשר x_i הם פתרונות של המערכת $x=(x_1,\dots,x_n)$ וגם $\dot{x}_i=f_i(x_1,\dots,x_n)$ אז

$$\frac{d}{dt}\varphi(\vec{x}(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot f_i(x_1,\dots,x_n)$$

משפט:

אם V פונקציית ליאפונוב עבור $\dot{x}=f(x)$ אזי x_0 נקודה שבת יציבה ובנוסף אם V פונ' ליאפונוב של ממש אז זו נקודה יציבה אסימפטוטית. (הוכחה תבוא בהמשך).

הערה: למצוא פונ' ליאפונוב זו בעיה כמעט בלתי אפשרית... כלומר לא חשוב. אבל במקרים ספציפיים מאוד נוח להוכיח איתן, לעשות למערכות לינאריות (שם אנו יכולים להוכיח יציבות אבל...)

V רציפה ומוגדרת חיובית

פונקציה מוגדרת חיובית: (ננסה להבין תכונות שלה...)

תהי $V(x)$ פונקציה מוגדרת חיובית ויהי $\varepsilon>0$, נסמן $\Omega(\varepsilon)$ להיות $\{x\in\overline{B}\mid V(x)<\varepsilon\}$, אזי משום ש V רציפה אז $\Omega(\varepsilon)$ קבוצה פתוחה, ובנוסף הנקודה אפס שייכת ל $\Omega(\varepsilon)$!

אם $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ אז $\Omega(\varepsilon_2)\subseteq\Omega(\varepsilon_1)$ כמובן...

הערה: משפחה של קבוצות $\Omega(\varepsilon)$, שהן סביבות של נקודה אפס, מהווים בסיס של סביבות של הנקודה $x_0=0$. כלומר התכנסות אוקלידית לפי אוקלידיות רגילה זה כמו התכנסות לפי האפשרות בסביבות $\Omega(\varepsilon)$

כלומר $x_n\to x \iff V(x_n)\to V(x)$, ובפרט $V(x(t))\to V(x_0)$ אמ"מ $x(t)\to x_0$

כלומר פונ' מוגדרת חיובית משרה מרחב נורמי שקול... זה שאומרים של קבוצות של דירקסון

במילים אחרות: לכל כדור B_{ε,x_0} קיים $\delta>0$ כך ש $\Omega_\delta\subseteq B_{\varepsilon,x_0}$ כי V מתאפסת רק באפס, ורציפה! ולהפך, לכל Ω_ε אפשר לבחור $\delta>0$ כך ש $B_\delta\subseteq\Omega_\varepsilon$ נזה בגלל כי $x_0\in\Omega_\varepsilon$ לכל ε ! Ω_ε פתוחה.

קיים כי הוא רציפה. ו- $\varepsilon/2$ פתח נגדי על פתוח ומתמינימום.

פירוש הגרף טובה יותר → פה מינימום! של V הקומפקטי שבגלל הרציפות

29/5/14

שיעור שבוע 14

הגדרה: פונ' ליאפונוב חיובית היא $V:\bar{B}_r(0)\to\mathbb{R}$ רציפה ברציפות כך ש

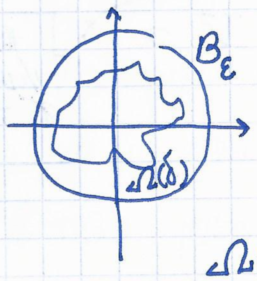
$V(x)=0$ אמ"מ $x=0$; $V(x)\ge 0$ לכל x. נסמן $V>0$

דוגמא: $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^4$

הגדרה: סימון $\Omega(c)=\{x\in\bar{B}_r(0) \mid V(x)<c\}$; כלומר כל הנקודות בהן הפונ' קטנה מ c.

מתקיים $\Omega(c)$ קבוצה פתוחה, ובנוסף לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $\Omega(\delta)\subseteq B_\varepsilon$

וגם להיפך, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $B_\delta\subseteq\Omega(\varepsilon)$.



משפט: אם $x_n\subseteq\bar{B}_r$ אז $x_n\to 0$ אמ"מ $V(x_n)\to 0$, וזה ברור מהתכונות לעיל:

הוכחה: אם $x_n\to 0$ מרציפות V נקבל $V(x_n)\to 0$

אם $V(x_n)\to 0$; אז לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך ש $\Omega(\delta)\subseteq B_\varepsilon$

מהתכונה לעיל, אבל החל ממספיק גדול $V(x_n)<\delta$ אז החל ממ"מ $x_n\in\Omega(\delta)\subseteq$

אז החל ממ"מ $x_n\subseteq B_\varepsilon$ אז יש התכנסות, כי לכל ε כל הסדרה מוכלת ב B_ε

החל ממ"מ, אז $x_n\to 0$ כנדרש.

בהגדרת V אנו משתמשים מאוד שהיא רציפה בהתכנסות לאפס

הכיוון המעניין: התכנסות הפונ' גוררת התכנסות המקורית

מסקנה: תהי $x(t)$ פונ' ואם מתקיים $V(x(t))\to 0$ אז $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$

(הוכחה מאינפי 1 והקשר בין סדרות לפונקציות)

הגדרה שיטה של ליאפונוב:

נתעניין במערכת $\dot{x}=f(x)$ עבורה $x\equiv 0$ נקודת שבת, אז מתקיים:

א) אם קיימת פונקציה $V:\bar{B}_R\to\mathbb{R}$ כך ש $V(0)=0$; V מוגדרת חיובית ; וגם $\dot{V}\le 0$ לכל הכדור. ($\dot V$ זה נגזרת מיוחדת כזכור).

כלומר $\dot V$ הולך להיות הנגזרת המורכבת הזו של הרכבת את V עם פתרונות המד"ר]

$$\dot{V}(z)=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\cdot f_i(z)$$

כל זה הוא הסבר לאיך להגדיר $\dot V$

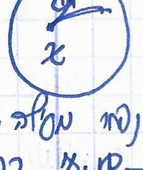
אז $x_0\equiv 0$ נקודה יציבה

ב) אם $\dot V$ מוגדרת שלילית אז הנקודה גם יציבה אסימפטוטית.

זה ברעיון מסה"כ הופכים ש V קטנה לאורך הפתרונות. יעני אם נסתכל על גבי הפתרון אז V יקטן ויתקרב לאפס, אז הפתרון ישאר בסביבת אפס ולכן יציב

תזכורת מאינפי 2: הנגזרת של פונ' $f:B\to\mathbb{R}$ בנקודה x לפי וקטור ϑ.

בפ"ר באינפי 2 בוחרים את γ להיות קו ישר. אנחנו נבחר את γ להיות הפתרון למד"ר בנקודה התחלה מסוימת



אז נבחר מסילה γ כך $\gamma:\mathbb{R}\to B$; $\gamma(0)=x_0$; $\dot\gamma(0)=\vartheta$

ואז

$$\frac{\partial f}{\partial\vartheta}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(\gamma(t))$$

אז מכלל השרשרת

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(\gamma(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x\cdot\dot{\gamma}_i(0)$$

או במילים אחרות:

$$(D_\vartheta f)_x=(Df)_x\cdot\vartheta=\langle\nabla f_x,\vartheta\rangle$$

זה פשוט לכתוב הגדרה בכתיב הכיוון... מאינפי 3

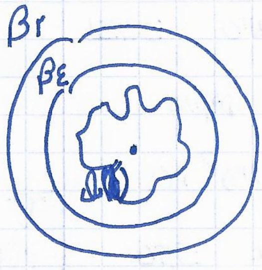
29/5/14

המשך שיעור 14

הוכחת המשפט:

1) נוכיח יציבות לפי ליאפונוב. יהי $\varepsilon>0$ (וגם נניח $\varepsilon<r$, כאשר r זה רדיוס הכדור עליו מוגדרת V). נמצא $\delta>0$ כך ש $\Omega(\delta)\subseteq B_\varepsilon$.

(בכדור זה אפשר לפי הלמה...).



יהי $\tilde{x}_0\in\Omega(\delta)$ תנאי התחלה קרוב מספיק לתנאי התחלה

בזמן 0, אז $x(t,\tilde{x}_0)\in\Omega(\delta)$ לכל $0\le t$

הפתרון עבור תנאי ההתחלה $\tilde{x}_0$

כי V לא גדלה על גבי פתרונות... כי אכן פונקציית ליאפונוב

$$V(x(t,\tilde{x}_0)) = V(0,\tilde{x}_0)+\int_0^t \underbrace{\dot{V}(x(s,\tilde{x}_0))ds}_{\text{מספר אי-חיובי!}}$$

לכן $\delta>V(\tilde{x}_0)\ge V(x(t,\tilde{x}_0))$, כלומר V לא גדלה על הפתרונות.

לכן $x(t,\tilde{x}_0)\in\Omega(\delta)$ וקיים δ' כך ש $B_{\delta'}\subseteq\Omega(\delta)$ כי $\Omega(\delta)$ סביבה פתוחה של אפס. לכן לכל $\tilde{x}_0\in B_{\delta'}$ מתקיים כי $x(t,\tilde{x}_0)\in\Omega(\delta)$ לכל $t\in[0,\infty)$! $\Omega(\delta)\subseteq B_\varepsilon$ לכן הראנו שלכל $\varepsilon>0$ אפשר לבחור δ' כך שאם ניקח תנאי התחלה קרובים עד רדיוס δ' אז הפתרונות ישארו קרובים עד רדיוס ε.

נניח כי $\dot{V}$ שלילית ממש פרט לנקודה אפס

2) נוכיח יציבות אסימפטוטית, ונראה שבנוסף לכל $\tilde{x}_0\in B_{\delta'}$ מתקיים $x(t,\tilde{x}_0)\xrightarrow{t\to\infty}0$. לשם כך מספיק שנראה $V(x(t,\tilde{x}_0))\to0$.

נסמן $\varphi(t)=V(x(t,x_0))$ ואז $\dot{\varphi}(t)=\dot{V}(x(t,\tilde{x}_0))$

לכן לפי ההנחה $\dot{\varphi}<0$ ולכן φ מונוטונית יורדת ממש, $\varphi>0$! לכן מתכנסת.

נראה שהיא מתכנסת לאפס. נניח בשלילה כי $\varphi(t)\to C$! $C\neq0$

אזי הח"מ $\varphi(t)$ ~~[illegible]~~ מקיימת $\varphi(t)\ge \frac{C}{2}$, כלומר

$x(t,\tilde{x}_0)\notin\Omega(\frac{C}{2})$ הח"מ, לכן $x(t,x_0)\in\underbrace{\bar{B}_r\setminus\Omega(\frac{C}{2})}_{K}$ הח"מ וזו הקבוצה הקומפקטית.

וכמו כן $\dot{V}$ רציפה ומוגדרת שלילית, לכן לכל $z\in K$ מתקיים $\dot{V}(z)<0$.

ממשפט ויירשטראס פונקציה רציפה על הקומפקט מקבלת מקסימום שגם הוא שלילי: $\gamma<0$.

לכן מתקיים $\varphi(t)=\varphi(T)+\int_T^t\dot{V}(x(s,\tilde{x}_0))ds$ (כאשר T זה המקום שהחל ממנו מתקיים)

לכן $0\le\varphi(t)\le\varphi(T)+\gamma\cdot(t-T)$

לכן עבור t מספיק גדול זה יהיה שלילי בסתירה, לכן הגבול אפס.

29/~~5~~/14

הרצאה שבוע 14

מערכת משוואות במישור - מיון נקודות קריטיות

נתונה לנו המערכת $\dot{x}=Ax+B$ כאשר $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$; $B\in\mathbb{R}^2$; $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

⊝ נקודת שבת/קריטית זה וקטור $\vec{x}_0$ כך ש $A\vec{x}_0+B$ ואז הפונ' $x(t)\equiv x_0$ היא פתרון של המע"ד. אם x_0 אינו נקודת האפס נבצע החלפת משתנים $(x-x_0)$!

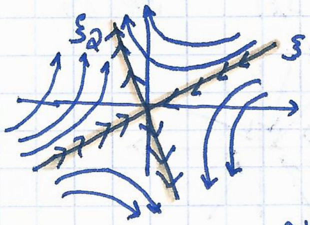
ואז $\dot{x}=(x-x_0)'=A(x-x_0)+B \leftrightarrow \dot{x}=Ax$ כי $Ax_0+B=0$

ולכן ההזזה תביא מע"ד שקולה. לכן בה"כ נניח כי $x_0=0$, כי ההזזה לא משנה דבר. לכן מספיק לחקור משוואות מהצורה $\dot{x}=Ax$. אז נחקור את A כמטריצה: $P_A(\lambda)=\lambda^2-trace(A)\lambda+\det A$ ונמצא ע"ע שהם שורשי הפולינום, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$.

נראה כפי שעשינו בעבר אנו יודעים איך נראה הפתרון הכללי, אנחנו מעוניינים בצורה של הפתרונות במישור $\mathbb{R}^2$. נפריד למקרים שונים:

מעבירים כאן רק ציור של פתרונות במישור

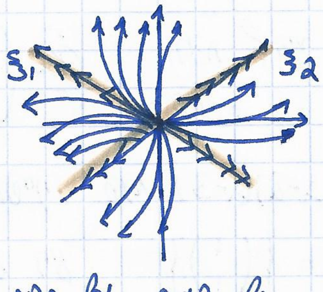
(א) נניח כי $\lambda_1<0<\lambda_2$ (בפרט שניהם ממשיים) אז הפתרון למערכת יהיה מהצורה $x(t)=\underbrace{e^{\lambda_1 t}\xi_1+e^{\lambda_2 t}\xi_2}_{\text{עם הכפלות בקבועים מתאימים...}}$ כאשר ξ_1,ξ_2 ו"ע המתאימים.



כאשר נמצא $x_0=0$ נקודת השבת שלנו. מקרה זה נקרא אוכף.

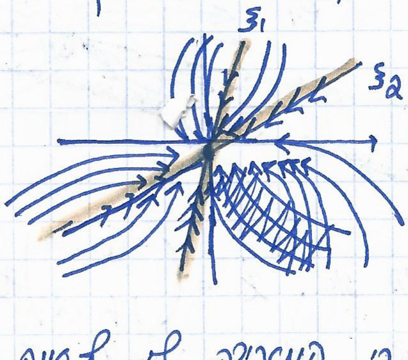
(ב) $0<\lambda_1<\lambda_2$ (שוב בפרט ממשיים) אז הפתרון מאותה צורה כמו קודם $x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}\xi_1+C_2e^{\lambda_2 t}\xi_2$ אז נקבל פתרון מהצורה

לחשוב על הפתרונות כהולכים ממינוס אינסוף לאינסוף



⊝ זה נקרא קשר לא יציב.

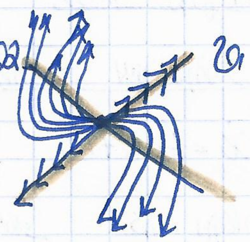
(ג) אם $\lambda_1<\lambda_2<0$ אז נקבל דומה אבל הפוך...



(ד) אם $0<\lambda_1=\lambda_2$ ונניח כי המטריצה לא לכסינה. כלומר v_1 ו"ע ; v_2 ו"ע מוכלל, אז הפתרון יהיה מהצורה $x=e^{\lambda t}v_1C_1+C_2e^{\lambda t}(tv_1+v_2)$

29/5/14

המשך תרגול



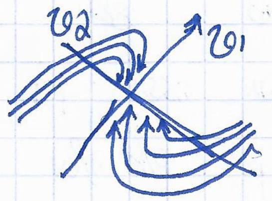
את האוריינטציה במרכז לפי איזה ו"ע ממשי ויש

אז המישור יהיה:

$$x(t)=e^{\lambda t}((c_1+c_2t)e_1+c_2e_2)$$

ולכן בזמן תהיה נקודה כלשהי שנשאף את המקדם של t ולכן יהיה תלוי רק ב-e_1 ו-e_2

אם $\lambda_1=\lambda_2<0$ זה יהיה דומה אבל הפוך בכיווני החצים, ובאוריינטציה של הסיבובים האלה



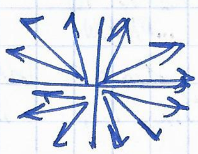
זה נקרא קשר מנוון

ג) אם $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ אז הפתרון הוא

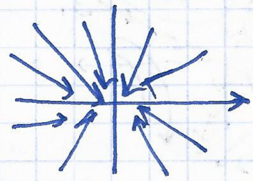
$$x(t)=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)$$

ויש נקודת ספירלה ולפי הסימן של α נקבע אם זו ספירלה מתכנסת או מתפזרת, ואם $\alpha=0$ זה פשוט מעגלים סביב הנקודה הקריטית.

ד) אם $\lambda_1=\lambda_2$ הע"ע של המטריצה ועם המטריצה לכסינה, כלומר יש v_1,v_2 ו"ע שונים ואז הפתרון הוא $x(t)=c_1e^{\lambda t}v_1+c_2e^{\lambda t}v_2$



$\lambda<0$

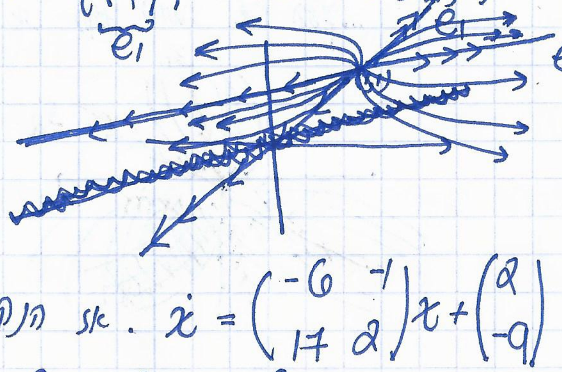


$\lambda<0$

תרגיל: $\dot{x}=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ ונרצה לצייר דיוקן פאזה. מיד נחפש את הנקודה הקריטית $x_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. כלומר $\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

מקיים שהפולינום האופייני הוא $P_A=(\lambda-2)(\lambda-3)$ ולכן 2,3 שני ע"ע ממשיים

מאחר שונים, נחפש ו"ע $V_2=\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{e_1}\}$; $V_3=\{\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{e_2}\}$



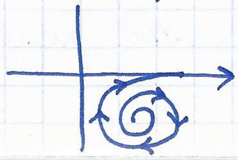
פשוט פותרים במערכת...

תרגיל: $\dot{x}=\begin{pmatrix}-6&-1\\17&2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix}$. אז הנקודה הקריטית היא $x_0=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

ומתקיים $P_A(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+5$ ולכן השורשים הם $\lambda_1,\lambda_2=-2\pm i$

זה מקרה של מוקד יציב:

פשוט מציבים הנקודה שלנו כדי לדעת הכיוון. למשל $(0,-4)$



אפשר פשוט לבחור נקודה ולהציב ולחשב את הכיוון השדה

הסיבה שהכיוון הוא ככה לא ידועה כעת...