7/5/14

שיעור שבוע 11

תזכורת: אנו עוסקים במערכת מהצורה $\dot{x}=Ax$ כאשר A מטריצה קבועה $A\in Mat_{n\times n}$ וראינו כי e^{At} הוא פתרון, כלומר מטריצה שעמודותיה הן הפתרונות הבסיסיים. $e^{At}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(At)^i}{i!}$ כאשר הטור מתכנס במ"ש בכל קומפקט.

ובנוסף $(e^{At})'=Ae^{At}$ וזה ע"י גזירה איבר איבר והתכנסות במ"ש של הנגזרת.

וכאשר אם x_0 וקטור תנאי התחלה אז פתרון הבעיה $x(t)=e^{At}x_0$, בפרט הפתרון כי זה קומבינציה של עמודות e^{At} שהם פתרונות והוא גם מקיים תנאי התחלה. כמו כן $\det e^{At}=e^{\mathrm{trace}\,At}$ הפיכה, לכן זו המטריצה הבסיסית!

כעת נרצה לחשב את e^{At}

דוגמאות: ① אם $A=0$ אז $e^{A}=Id$.

אלכסונית ← ① אם $A=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ אז $A^k=diag(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)$ ולכן:

$e^{A}=diag(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n})$ כי בכל רכיב והוא הטור המתאים בנפרד.

מטריצה סיבובית ← ① $A=\begin{pmatrix}0&\beta\\-\beta&0\end{pmatrix}$ אז מקיים $A^2=\begin{pmatrix}-\beta^2&0\\0&-\beta^2\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}0&-\beta^3\\\beta^3&0\end{pmatrix}$; $A^4=\begin{pmatrix}\beta^4&0\\0&\beta^4\end{pmatrix}$ ולכן:

$$e^{At}=I+\begin{pmatrix}0&\beta t\\-\beta t&0\end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix}-(\beta t)^2&0\\0&-(\beta t)^2\end{pmatrix}}{2}+\dots$$

ולכן מקיים: [באלכסון הראשי יהיה זוגיים ובהפוך האי-זוגיים]

מטריצה אורתוגונלית →
$$e^{At}=\begin{pmatrix}\cos\beta t&\sin\beta t\\-\sin\beta t&\cos\beta t\end{pmatrix}$$
← הטור הזוגי של e בסימנים הפוכים זה קוסינוס, והאי-זוגיים זה סינוס

מטריצת בלוקים ← ① $A=\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix}$ ⟵ $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{A_1t}&\\&e^{A_2t}\end{pmatrix}$

נובע מכך שכפל וחיבור מטריצות ישאר באותו הבלוק...

תכונות:

① אם A ו-B דומות כלומר $B=G^{-1}AG$ עבור G הפיכה כלשהי. אז $e^{Bt}=G^{-1}e^{At}G$.

← מטריצות של אותו האופרטור רק לפי בסיס שונה

הוכחה:

$$e^{Bt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Bt)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(G^{-1}AtG)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{G^{-1}(At)^kG}{k!}=G^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}G=$$
$$=G^{-1}e^{At}G$$

פעולה סגורה

לכן בעצם היינו צריכים להסתכל על ערכים עצמיים של אופרטור ולא של מטריצה... כי אותה זה רק תלוי בבסיס

7/5/14

המשך שיעור 11

עובדה: נסמן J_A את צורת ג'ורדן של מטריצה A. [לכל מטריצה יש צורת ג'ורדן (משפט ג'ורדן)] ולכן $A=G^{-1}J_AG$ עבור G הפיכה כלשהי. ולכן למישוב אקספוננט מספיק לחשב רק את אקספוננט של ג'ורדן.

$$e^{At}=Ge^{J_At}G^{-1}$$

עובדה: אם J_A אלכסונית, כלומר A לכסינה, אזי $J_A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ולכן נקבל כי

$$e^{At}=G\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}G^{-1}.$$

כאשר G היא מטריצת בסיס ג'ורדן.

$$AG=G\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

נסמן G_k את עמודה k של מטריצה G ונקבל

$$(AG)_k=A\cdot G_k \quad ; \quad G\cdot\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\lambda_k G_k$$

ולכן $AG_k=\lambda_k G_k$, לכן עמודות G הם וקטורים עצמיים של מטריצה A.

[ברור... בסיס ג'ורדן של מטריצה לכסינה זה הוקטורים העצמיים הפורשים את הבסיס...]

[כמובן G אינה יחידה, זה תלוי בבחירת הבסיס של הו"ע העצמיים]

⊖ לכן אם A לכסינה אז הפתרונות למערכת יהיה $x(t)=e^{At}x_0$ כלומר

$$x(t)=G\cdot\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t})\underbrace{G^{-1}x_0}_{y_0} \longleftrightarrow x(t)=G\cdot\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t})y_0$$

וזה הפתרון שמקיים תנאי התחלה x_0.

y_0 היווה פירוש וקטור תנאי ההתחלה לפי הבסיס העצמי של A

ולכן:

$$x(t)=\begin{pmatrix}|&&|\\v_1&\dots&v_n\\|&&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&&\\&\ddots&\\&&e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}|&&|\\e^{\lambda_1 t}v_1&\dots&e^{\lambda_n t}v_n\\|&&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\boxed{\sum_{i=1}^{n}y_ie^{\lambda_i t}v_i}$$

נוסחא סגורה לפתרון!

נסמן $\{v_1,\dots,v_n\}$ הבסיס העצמי של A

בפועל עושים החלפת בסיס ומקבלים שהפתרונות הם פשוט מאוד

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ [בדרך השטח נלקח מטריצה סימטרית...]

כאן הע"ע ממשיים! אם הם מרוכבים זה מסובך, ויש אקספוננט מרוכב

את פולינום אופייני הוא $\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$ ולכן 3 ; -1 שורשים, כלומר ע"ע למטריצה. נמצא ו"ע:

$$Av_1=3v_1\longmapsto v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$Av_2=-v_2\longmapsto v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

ולכן: $G=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ מטריצת מעבר בסיסים. במקרה זה G^{-1} פשוטה מאוד... אבל במקרה הכללי נקבל:

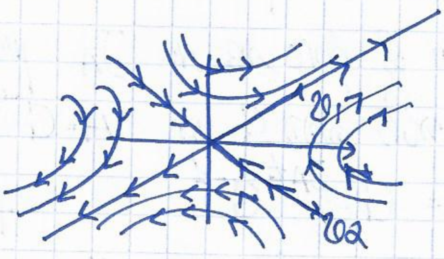
$$x(t)=y_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

ואלו הם כל הפתרונות, כאשר y_1, y_2 קובעים את תנאי ההתחלה, והם הפירוש של תנאי ההתחלה לפי הבסיס העצמי שלנו.

הסימנים של הע"ע מבטאים הגם הפתרון מתכווץ או מתרחב מבחינה הכיוונים בכיוון הו"ע בקצב אקספוננציאלי

המשך שיעור 11

בכיוון ופ1 יש התכנסות כי הסימן חיובי, ובכיוון ופ2 יש התבדרות כי הסימן שלילי.



מישור פאזה של הדוגמא הקודמת
זה אוכף.

מסקנה נוספת:

נזכר כי J_A [צורת ז'ורדן] בנויה מבלוקי ז'ורדן, ונרצה אקספוננט של מטריצת בלוקים
אפשר לעשות בלוק בלוק. נסמן $\Lambda_{k,\lambda}$ את בלוק ז'ורדן של ע"ע λ מגודל k

$$k\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{k}\right.$$

איך נחשב האקספוננט שלו?

טענה: אם A,B מטריצות מתחלפות בכפל $(AB=BA)$ אז

$$e^Be^A=e^{A+B}=e^Ae^B$$

תרגיל: למצוא דוגמא לכך שאם A,B לא מתחלפות אז זה לא נכון.

מסקנות:

1) ברור כי At,As מתחלפות, ולכן $e^{At}\cdot e^{As}=e^{At+As}$

t,s סקלרים

2) אם $t=-s$ נקבל $I=e^0=e^{At}\cdot e^{-At}$
ולכן תמיד הפיכה, וההופכית גם מוכרת...

כי B תמורה של תמורה המטריצות הפיכות

3) אם $A=\lambda I$ מטריצה סקלרית ולכן $e^{\lambda I+B}=e^{\lambda I}\cdot e^B=e^\lambda e^B$

$e^{\lambda I}=e^\lambda I$
כלומר זה גם מטריצה סקלרית

ולכן אם $\Lambda_{k,\lambda}$ בלוק ז'ורדן אז הוא סכום של
λI ועוד N מטריצה נילפוטנטית מסדר k כלומר $N^k=0$
כלומר $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$; $\Lambda_{k,\lambda}=\lambda I+N$

מומלץ להיזכר בבלוקי ז'ורדן ובהוכחה שלינארית 2

ולכן קל לחשב אקספוננט של N:

$$e^{Nt}=I+Nt+\dots+\frac{(Nt)^{k-1}}{(k-1)!}=\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

כי כל השאר מתאפסים, כי N נילפוטנטית...

חישוב פשוט

ולכן מתקיים:

$$e^{\Lambda_{k,\lambda}t}=e^{t(\lambda I+N)}=e^{\lambda tI}\cdot e^{Nt}=e^{\lambda t}\cdot \underbrace{e^{Nt}}_{\text{חישבנו הרגע...}}$$

⊖ אז בעיקרון הכל, אנו יודעים להעלות כל מטריצה באקספוננט. (עברה לצורת ז'ורדן
ונעשה לכל בלוק בנפרד. [נחזור להוכיח את הטענה...]

דוגמא: $A\cong\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ אז נרצה לפתור את $\dot{x}=Ax$. נסמן $\{v_1,\dots,v_n\}$
וקטורי בסיס ז'ורדן, אז v_1 וקטור עצמי.

אז: $C=(v_1\dots v_n)$ מטריצת מעבר הבסיסים. $C^{-1}AC=J_A$ ← $AC=CJ_A$

7/5/14

המשך שיעור 11

אזי מקיים: $Av_1=\lambda v_1$; $Av_2=\lambda v_2+v_1$; $Av_3=\lambda v_3+v_2$

וכך הלאה... זה מגדיר את בסיס הג'ורדן. לכן הפתרון למערכת יהיה:

$$x(t)=Ce^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\\ & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & \frac{t}{1}\\ & & & 1\end{pmatrix}\underbrace{C^{-1}x_0}_{y_0}\longmapsto$$

y_0 היו פרישת וקטור תנאי ההתחלה x_0 לפי בסיס ג'ורדן $v_1,\dots,v_n$

לכן:

$$x(t)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \cdots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots\\ & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}\\ & & \ddots & \frac{t}{1}\\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}| & | & | & \\ v_1 & tv_2+v_1 & \frac{t^2}{2}v_3+tv_2+v_1 & \cdots\\ | & | & | & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=$$

כפל מטריצות פשוט

$$=y_1e^{\lambda t}v_1+y_2(tv_2+v_1)e^{\lambda t}+\dots+y_ne^{\lambda t}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}v_{n-i}\right)$$

וזה דבר כללי לפתרון במקרה זה, כאשר המקדמים החופשיים נקבעים ע"י תנאי ההתחלה.

<u>הוכחת הטענה:</u> כזכור הטור e^A מתכנס בהחלט (לפי נורמה) ראינו בעבר. לכן ניתן להחליף סדרים [כי ההתכנסות גם במ"ש בt בכל תחום חסום].

כזכור מקיים $(A+B)^n=\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}A^kB^l$. לכן ממכפלת קושי לטורים נקבל:

מניחים ש A ו B מתחלפים!

$$e^A\cdot e^B=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B^l}{l!}\right)=\sum_{k,l}\frac{A^kB^l}{k!l!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+l=n}\frac{A^kB^l}{k!l!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n=e^{A+B}$$

כופלים כל איבר בכל איבר...

שינוי סדר הסכימה. יש התכנסות בהחלט!

לפי הגדרה

<u>משולש פסקל:</u>

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

אז סה"כ מג'ורדן המטריצה, מעלים לבדוק בנפרד באופן שאינו רק מס'...

⊖ <u>מה לגבי ערכים עצמיים מרוכבים?</u> יכול להיות שהו"ע מרוכבים, וגם הע"ע יכולים להיות מרוכבים. אם המטריצה ממשית אז גם הפולינום האופייני ממשי ולכן הע"ע, השורשים שלו, יבואו בזוגות של מספרים ממשיים צמודים. אם λ ו $\bar{\lambda}$ שני ע"ע הבאים בזוגות אז גם הו"ע יהיו צמודים, כלומר אפשר לבחור את בסיס ג'ורדן בצורה נוחה כך שהפתרונות ישארו ממשיים.

כלומר ניתן ~~לבחור~~ לבחור את בסיס ג'ורדן כך שאם v_k ו"ע שהתאים לλ אז נבחר את $\bar{v}_k$ להיות הו"ע של $\bar{\lambda}$ ואז נקבל:

$$x(t)=Ce^{J_At}C^{-1}x_0\longmapsto$$

אם נבחר את C כמו שאמור לעיל $\longmapsto$

כל מקדם מרוכב יופיע עם צמוד שלו ולכן $x(t)$ יהיה ממשי!

7/5/14

המשך שיעור 11

דוגמא: נניח A מטריצה 2×2 עם שני ע"ע שונים (בפרט לכסינה) $\lambda_1=\alpha+i\beta$ ו $\lambda_2=\alpha-i\beta$, אזי:

$$e^{At}=C\begin{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-i\beta)t}\end{pmatrix}C^{-1}$$

יהי v ו"ע של λ_1, אז $\bar{v}$ ו"ע של λ_2 בבירור...

$$x(t)=\left(v\,\middle|\,\bar{v}\right)\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda}t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}=$$

$$=y_1 v e^{\lambda t}+y_2\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$$

כאשר y_1 ו- y_2 חייבים להיות צמודים, כי הפתרון הוא יחיד, וע"י לקיחת בתנאי ההתחלה

מספרים מרוכבים צמודים, לכן זה ממשי כמו שציפינו

8/5/14

המשך שיעור 11

תזכורת: כדי לחשב e^{At} קודם מעבירים את A לצורת ז'ורדן J_A ע"י בסיס ז'ורדן C ואז $e^{At}=Ce^{J_At}C^{-1}$, ואז מספיק להפעיל כל בלוק בנפרד. כאשר אם $\Delta_{k,\lambda}$ בלוק ז'ורדן אז

$$e^{\Delta_{k,\lambda}}=e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & \ddots & t \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

דוגמא: תהי $f\in C^\infty$ אז משמעות טיילור נקודתי:

$$\underbrace{f(t+\Delta t)}=f(t)+f'(t)\Delta t+\frac{f''(t)\Delta t^2}{2}+\dots+\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(\Delta t)^k+\dots$$

נתבונן על זה כאופרטור על פונ'.
$T: f(t)\longmapsto f(t+\Delta t)$
אז בבירור T אופרטור לינארי

נתבונן באופרטור הלינארי $D: f\longmapsto\frac{\partial f}{\partial t}$. זה גם אופרטור לינארי, אופרטור הגזירה.

לכן אם נסמן טיילור אפשר לרשום אותה, במונחים של אופרטורים לינאריים. $T(f)=(I+\Delta t\cdot D+\frac{(\Delta t)^2D^2}{2!}+\dots)(f)$ לכל f. לכן נקבל זהות בין אופרטורים: $T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Delta t)^nD^n}{n!}=e^{\Delta tD}$

$$\boxed{T=e^{\Delta t D}}$$

לכן קיבלנו זהות

נקח את מרחב כל הפולינומים ממעלה n-1 (או פחות), ונסמן ב V. אז $\dim V=n$

נקח בסיס למרחב $\{e_i\}_{i=1}^n$ כאשר $e_i=\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}$

נייצג את פעולת D ו- T במרחב V כמטריצה לפי הבסיס הזה, ונראה נכונות בזהות שהראינו $T=e^{\Delta tD}$

8/5/14

המשך שיעור 11

המשך דוגמא:

$$T(e_1)=e_1$$

$$T(e_2)=e_2+\Delta t e_1$$

$$T(e_3)=\frac{(t+\Delta t)^2}{2!}=e_3+t\Delta t+\frac{(\Delta t)^2}{2!}=e_3+\Delta t e_2+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\cdot e_1$$

לכן נסיק ונקבל:

$$T=\begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2!} & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & \Delta t & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \frac{(\Delta t)^2}{2!} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה של אופרטור T לפי הבסיס שבחרנו.

נחשב את D:

$$\frac{\partial e_1}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial e_3}{\partial t}=e_2$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t}=e_1 \qquad \vdots$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

לכן זה הפיתוח מטריצה נילפוטנטית:

לכן בעצם קיבלנו

$$e^{\Delta t\cdot D}=T$$

כי כבר ראינו מה זה אקספוננט של נילפוטנטית.

במקרה הכללי שבו השאלה עצמה. אז נוסחת טיילור זה שוויון אופרטורים לינאריים

תרגיל: נגדיר V מרחב כל הקוואזי פולינומים מדרגה $n-1$ (או פחות) ולהסיק את נוסחת טיילור במקרה הזה, ע"י בחירת בסיס מתאים.

הערה: כמו שחישבנו אקספוננט של מטריצה, אפשר לחשב כל פונ' אנליטית f על מטריצה ע"י הצבה בטור. כלומר אם f אנליטית, $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ והטור מתכנס ברדיוס R, ונחות A מטריצה כך ש $\|A\|<R$ ואז $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n A^n$, והטור יתכנס בהחלט, כי הנורמה בתוך רדיוס ההתכנסות, ולכן טור הנורמות מתכנס וחוסם את הטור שלנו. (א"ש המשולש וכו')

למשל: $f(z)=\sin z$ מתכנס בכל המישור ואז נגדיר $\sin A$, וכנ"ל עבור $\cos z$

עבור $\log(1+z)$ יש הגבלה למטריצות מנורמה קטנה מ1.

וכל התכונות נשמרו, למשל $\frac{\partial}{\partial t}(\sin(At))=A\cdot\cos(At)$, כי הזהויות הן על הטורים.

דוגמא: אם יש לנו מד"ר $\ddot{x}+\Omega^2 x=0$ כאשר x מטריצה מאת אז $\sin(\Omega t)$; $\cos(\Omega t)$ הפתרונות היסודיים ופורשים את כל המטריצות שהן פתרון.

שאלה: איך נחשב בפועל $f(A)$ כאשר f אנליטית וA מטריצה? נעשה כמו אקספוננט:

1) נג'רדן המטריצה $G^{-1}AG=J_A$ ואז $G^{-1}f(A)G=f(J_A)$
לכן מספיק לחשב על ז'ורדן.

8/5/14

המשך שיעור 11

② מתקיים גם שעבור מטריצת בלוקים ניתן לחשב עבור כל בלוק בנפרד. בפרט עבור מטריצה אלכסונית, נפעיל את f על כל איברי האלכסון בנפרד.

③ אם כך נותר לחשב מה עושים לבלוק ז'ורדן בנפרד.

אז נניח כי $A \sim \Delta_{\lambda,n}$ כלומר $G^{-1}AG = \lambda I + N$ אז מתקיים:

$$f(A) = G f(\Delta_{\lambda,n}) G^{-1} \quad ; \quad f(\Delta_{\lambda,n}) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{פרוש המוח}}$

הוכחה:

$$f(\Delta_{\lambda,n}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda I + N)^k = \left[\begin{matrix}\lambda I \text{ מתחלפת} \\ \text{ניתן שימוש}\end{matrix}\right]$$

$$\left[\begin{matrix}\text{בינום של} \\ \text{ניוטון}\end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} \lambda^{l} \cdot N^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} \lambda^{(k-l)} N^{l}$$

ונזכר ש-N היא מטריצה חזקה נילפוטנטית. לכן על האלכסון הראשי יופיע רק מקדם בהם N הייתה בחזקת אפס, ולכן $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$

האלכסון הראשי של המטריצה הסופית.

על האלכסון השני יופיעו רק ערכים שהתקבלו רק על N^1 ולכן נקבל הסדר $f'(\lambda) = (\sum a_k \lambda^k)' = \sum a_k \cdot k \lambda^{k-1}$ וכן עבור האלכסון הבא, והמשך אלכסון ולכן הנוסחא מתקבלת כנדרש.

$\boxed{\text{גזירה איבר איבר}}$

8/5/14

תרגול שבוע 11

אקספוננט של מטריצה: [אופרטור ממרחב המטריצות למרחב המטריצות]

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

⊖ מתקבל לפי טור טיילור של פונקציית האקספוננט:

הערה: אם מטריצה היא נילפוטנטית אז הטור סופי, ולכן קל לחשב

⊖ **תכונה:** אם $A = PBP^{-1}$ אז $e^A = P e^B P^{-1}$

מהגדרה נובעת הטור, ומאסוציאטיביות של כפל מטריצות.

⊖ **תכונה:** אם $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ אז $e^A = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ ולכן לכל מטריצה לכסינה בה קל למצוא אקספוננט שלה.

מעל המרוכבים כל המטריצות ז'ורדניות, כבר מסוכם ומוכחים אינוריאנטים שיעור 2

תרגיל: חשב e^A עבור $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

פתרון: נמצא ע"ע: $f_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ היינו פולינום אופייני.

לכן $f_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$ ולכן A לכסינה כי היא מתפרקת לע"ע שונים כלומר יש לה 2 ע"ע שונים והיא 2x2.

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_3 = \ker\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

8/5/14

המשך תרגול 11

המשך תרגיל: לכן $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ לכן:

הפכנו המטריצה עם פירוק של 2x2

$$e^{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2} & \\ & e^{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

תרגיל: חשבו את e^{At} עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ אז $\Delta_A = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

לכן $\Delta_A = (\lambda-2)^2$. לכן 2 ע"ע מריבוי אלגברי 2. נבדוק מהו הריבוי הגאומטרי ונקבל:

$V_2 = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ ולכן הריבוי הגאומטרי הוא 1

לכן המטריצה לא לכסינה, אלא דומה ל $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$! ונקבל בסיס ז'ורדן אחד הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ונחפש וקטור נוסף. $\ker(A-\lambda I)^2 \supsetneq \ker(A-\lambda I) \supsetneq 0$

צריך וקטור שהוא ב $\ker(A-\lambda I)^2$ אבל לא ב $\ker(A-\lambda I)$

כלומר $(A-\lambda I)^2 v = 0$; $(A-\lambda I)v \neq 0$. ניקח את v להיות ו"ע מוכלל, כלומר נפתור $(A-\lambda I)v = e_1$ ונבחר שבה יקיים הדרישה שלנו.

משפט פירוק ז'ורדן קיים חזקה שבה השרשרת מתאפסת, כלומר הגרעין שלה והוא המרחב

כלומר אחרי שמורידים את $I\lambda$ נקבל נילפוטנטית, לכן יש חזקה שמתאפסת

מכל אחד מהשרשראות נוסיף וקטור אחד וכך נקבל בסיס

לכן נפתור את

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{(A-\lambda I)}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{e_1}$$

לכן! $x = -y-1$

נשים לב שוקטורים עצמיים מוכללים הם לא מה וקטורי

לכן ניקח $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור בסיס שני לז'ורדן. לכן

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{E}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{E^{-1}} \mapsto e^{At} = E\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ & e^{2t} \end{pmatrix}E^{-1}$$

דוגמא חשובה: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ [שקולה במישור מעין למספר i]

מה e^{Jt}? אז $\Delta_J = \lambda^2 + 1$ ואז נקבל $e^{Jt} = E\begin{pmatrix} e^{it} & \\ & e^{-it} \end{pmatrix}E^{-1}$

אבל יש דרך פשוטה יותר:

$$e^{J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} =$$

$$= I\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\right) + J\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}\right)$$

אם נחשב חזקות של J נראה כי חזקות זוגיות הן על האלכסון הראשי, ואי-זוגיות על האלכסון ההפוך

$J^0 = I;\ J^1 = J;\ J^2 = -I;\ J^3 = -J;\ J^4 = I$

לכן! $e^{J} = I\cos(1) + J\sin(1)$

אז: $e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

8/5/14

המשך תרגול 11

תרגיל:

$$e^{\begin{pmatrix}2&-\pi\\\pi&2\end{pmatrix}} = e^{2I-\pi J} = e^{2I}\cdot e^{-\pi J} = e^{2}I\begin{pmatrix}\cos(-\pi)&\sin(-\pi)\\-\sin(-\pi)&\cos(-\pi)\end{pmatrix} =$$

$$= e^{2}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} = -e^{2}I$$

הערה: אם A ו-B מתחלפים אז
$e^{A+B}=e^{A}e^{B}$

ובאופן כללי:

$$e^{\begin{pmatrix}2&-\pi\\\pi&2\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}e^{2t}\cos(\pi t)&-e^{2t}\sin(\pi t)\\e^{2t}\sin(\pi t)&e^{2t}\cos(\pi t)\end{pmatrix}$$

ובאופן כללי יותר נקבל:

$$e^{(\alpha I+\beta J)t} = e^{\alpha t}(I\cos(\beta t)+J\sin(\beta t))$$

כמו נוסחת אוילר למטריצות

תרגיל: מהו $e^{\begin{pmatrix}5&-4\\5&-3\end{pmatrix}}$?

פ"א $\Delta=\lambda^2-2\lambda+5$ ולכן $\Delta=(\lambda-1)^2+4$ ולכן $(\lambda-1)^{\cancel{2}}=\pm 2i$ ולכן $\lambda=1\pm 2i$

ל' ע"ע שונים ולכן לכסינה, אבל הם מרוכבים.

אפשר למצוא וקטורים עצמיים, גם הם יהיו מרוכבים, ונוכל לפרק לחלקים ולבנות מרכבה עזר.

נבנה שיטה אחרת, למשל עבור 2x2.

נמצא ו"ע עבור $1-2i$. אז:

$$V_{1-2i}=\ker\begin{pmatrix}4+2i&-4\\5&-4+2i\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}20&-16+8i\\5&-4+2i\end{pmatrix} = span\left\{\overbrace{\begin{pmatrix}4-2i\\5\end{pmatrix}}^{e_1}\right\}$$

הכפלנו בצמוד

ולכן

$$V_{1+2i}=span\left\{\overbrace{\begin{pmatrix}4+2i\\5\end{pmatrix}}^{e_2}\right\}$$

כמובן שאפשר לשמור את הפורמט...

כעת נגדיר $\tilde{e}_1=\cancel{Im}\,Re(e_1)$ ו- $\tilde{e}_2=Im(e_1)$

ולכן $\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2\}=\left\{\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}^2$. נגדיר $E=\begin{pmatrix}4&2\\5&0\end{pmatrix}$

ולכן $EAE^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}=I-2J$

ולכן אנחנו יודעים לעשות אקספוננט. לגבי הערות מטריצה של ע"ע מרוכבים למטריצה מהצורה המרוכבת שאנחנו יודעים לעשות אקספוננט.

$$(A-\lambda I)v=0$$
$$\downarrow$$
$$\overline{(A-\lambda I)v}=0$$
$$\downarrow$$
$$(\bar{A}-\bar{\lambda}I)\bar{v}=0$$
$$\downarrow$$

A ממשית!

$$(A-\bar{\lambda}I)\bar{v}=0$$

ולכן אם v ו"ע של λ אז $\bar{v}$ ו"ע של $\bar{\lambda}$