

W11D2

21/05/2012

הרצאה

המשפט של גלואה (1830) ספרותי, מנחה, $F[X]$ פולינום, $G_{f(x)} \subset S_n$

המשפט של גלואה: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שורשי פולינום $f(x)$ מעל L (המשפט של גלואה) $(F \subset L \text{ פולינום } f(x) \in L)$

הצגה:

$$D(f) = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = \frac{\Delta(f)}{f'(x)}$$

הדיסקרימיננטה של הפולינום $f(x)$

ע"פ $F = \mathbb{Q}$ (הוא אינו נמצא ב- F)
 כי אין נוסחה כללית להחלפת שורשים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (המשפט של גלואה)
 (המשפט של גלואה) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שורשי פולינום $f(x)$ מעל L (המשפט של גלואה)

$$f(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = c(x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n)$$

$$\delta(f) = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) \in L$$

$$F \ni D(f) = \delta(f)^2$$

$\Rightarrow \delta(f)$ הוא אלמנט ממוחזר. $F \subset L$ ו- $\delta(f) \notin F$ (המשפט של גלואה)
 : $s \in S_n$ החלפה

$$s(\delta(f)) = \prod_{i < j} (\alpha_{s(i)} - \alpha_{s(j)}) = \text{sign}(s) \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)$$

הסימן של ההחלפה

$$s(\delta(f)) = \text{sign}(s) \delta(f)$$

$$s \in G_{f(x)} \Leftrightarrow \text{sign}(s) = 1 \Leftrightarrow \delta(f) \in F$$

המשפט של גלואה: $G_{f(x)} \subset A_n$

המשפט של גלואה: $\sqrt{D(f)} \in F \Leftrightarrow G_{f(x)} \subset A_n$
 (המשפט של גלואה) $\sqrt{D(f)} \in F$ (המשפט של גלואה)
 (המשפט של גלואה) $\sqrt{D(f)} \in F$ (המשפט של גלואה)

11/12/19

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

$$x^3 + px + q$$

$$D = -(4p^3 + 27q^2) = -(4 \cdot (-27) + 27) = 3 \cdot 27 = 9^2$$

$$\sqrt{D} = \pm 9 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow Gf(x) \subset A_3 \quad |A_3| = \frac{3!}{2} = 3$$

$$|Gf(x)| = [L:\mathbb{Q}] = \deg f(x) = 3$$

$$(3 \text{ גורם } \sqrt{3})$$

$$Gf(x) = A_3$$

ולכן

2. בדיקת האנליזה. $\zeta_p \in \mathbb{C}$ איננו יחיד.

$$\zeta_p = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p} \quad \text{למשל } p=5$$

$$\mathbb{Q} \quad \text{הוא שדה } f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

$$\zeta_p, \zeta_p^2, \dots, \zeta_p^{p-1}$$

$$\mathbb{Q} \quad \text{אם } f(x) \text{ הוא פולינום } \zeta_p \in \mathbb{Q}[\zeta_p]$$

ולכן שדה זה

$$\sigma \in G_{\mathbb{Q}[\zeta_p]/\mathbb{Q}} \quad \sigma(\zeta_p) = \zeta_p^j \quad \text{כאשר } 1 \leq j \leq p-1$$

$$\sigma_j : \mathbb{Q}[\zeta_p] \rightarrow \mathbb{Q}[\zeta_p]$$

$$\sigma_j(\zeta_p) = \zeta_p^j$$

$$a_r \in \mathbb{Q} \quad \sigma\left(\sum_{r=0}^{p-1} a_r \zeta_p^r\right) = \sum_{r=0}^{p-1} a_r \sigma(\zeta_p^r)$$

$$G_{\mathbb{Q}[\zeta_p]/\mathbb{Q}} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}\}$$

$$\sigma_i \circ \sigma_j(\zeta_p) = \sigma_i(\zeta_p^j) = \zeta_p^{ij \pmod{p}}$$

$$\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_{ij \pmod{p}}$$

$$\sigma_j \mapsto j \pmod{p}$$

ולכן

האומורפיזם הזה

$$G_{\mathbb{Q}[\zeta_p]/\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$$

3. יהי $K = \mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}]$ כך ש:

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ו- a_i אינם

אין שום אי-כנסות אחרת מלבד

כריכים a_i מספר ראשוניים (כלומר, a_i אינם חזקים)

אז: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}]$

יהי K שדה המורכב מ-

מחזיקה 2^n של $\mathbb{Q}$:

$$G_{K/\mathbb{Q}} \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2}_n$$

כוכבים:

$$K = \mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}] \quad n=2$$

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}]: \mathbb{Q}] = 2$$

$\sqrt{a_2}$ איננו מחזיקה 1 או 2 של $\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}]$.

המחזיקה 1 איננה $\sqrt{a_2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{a_1}]$.

(יהיה כי זה אי "כן")

אם כן, $\sqrt{a_2} = \alpha + \beta \sqrt{a_1}$ עם $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\beta \neq 0$.

המחזיקה של $\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}]$ היא G .

$$G(\sqrt{a_1}) = -\sqrt{a_1} \quad \text{כך ש-}$$

$$G(\sqrt{a_2}) = \alpha - \beta \sqrt{a_1} \quad \text{אז}$$

$$\varepsilon = \pm 1, \quad G(\sqrt{a_2}) = \varepsilon \sqrt{a_2} \quad \text{כלומר}$$

$$\varepsilon \alpha + \varepsilon \beta \sqrt{a_1} = \varepsilon \sqrt{a_2} = \alpha - \beta \sqrt{a_1} \quad \text{אז, נקבל:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \varepsilon \alpha \\ -\beta = \varepsilon \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varepsilon = -1 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \text{או} \end{array}$$

$$\sqrt{a_2} = \beta \sqrt{a_1} \quad \text{אז,} \quad \sqrt{a_2} = \beta \sqrt{a_1}$$

השדה המורכב מ-

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}]: \mathbb{Q}] = 4 \quad \text{אז,}$$

$$G_{E, E} \quad G(\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}]/\mathbb{Q}) : (\text{NO}) \quad , \quad E_1 = \pm 1 \quad \text{כ} \sqrt{}$$

$$G_{E_1}(\sqrt{a_1}) = E_1 \sqrt{a_1}$$

$$\text{---} \quad \text{כ} \quad \text{כ} \quad \text{כ} \quad [\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}] : \mathbb{Q}[\sqrt{a_1}]] = 2 \quad \text{כ} \quad \text{כ} \quad \text{כ}$$

$$\text{כ} \quad G(\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}]/\mathbb{Q}) \quad \text{כ} \quad \text{כ} \quad \text{כ}$$

$$\text{כ} \quad E_2 = \pm 1 \quad \text{כ} \quad \text{כ} \quad \text{כ}$$

$$G_{E_1, E_2}(\sqrt{a_1}) = E_1 \sqrt{a_1}$$

$$\sqrt{a_2} \mapsto E_2 \sqrt{a_2}$$

$$G(\mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}]/\mathbb{Q}) = \{ G_{E_1, E_2} \mid E_1 = \pm 1, E_2 = \pm 1 \} \cong C_2 \times C_2$$

$$G_{E_1, E_2} \cdot G_{E'_1, E'_2} = G_{E_1 E'_1, E_2 E'_2}, \quad C_2 = \{ \pm 1 \}$$