

WSD2

22/04/2022

11' ON 1721

ל. 1. מ. 1721 מ. 1721 מ. 1721
 י. 1. מ. 1721 מ. 1721 מ. 1721
 (1721) 1721 מ. 1721 מ. 1721
 (1721) 1721 מ. 1721 מ. 1721

מ. 1721 מ. 1721 מ. 1721
 מ. 1721 מ. 1721 מ. 1721

$$(K(x))^p \subsetneq K(x)$$

$$x \notin K(x)^p$$

מ. 1721

$$K[x] \ni a(x), b(x) \neq 0$$

$$x = \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)^p$$

$$(\Rightarrow) x \cdot b(x)^p = a(x)^p$$

$$1 + p \cdot \deg(b(x)) = p \cdot \deg(a(x))$$

$$1 + p \cdot \deg(b(x)) = p \cdot \deg(a(x))$$

1721

$$\sqrt{p} \notin \mathbb{Q} \quad p \in \mathbb{Q} \quad p \neq 0$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - p)$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{p}) = 2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \sqrt{p}^i = b_0 + b_1 \sqrt{p} \quad a_i, b_0, b_1 \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \text{Span}\{b_0, b_1\}$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{p}) = 2$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - p)$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - p)$$

3.

ראשון: $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \frac{a}{a^2-b^2} + \left(\frac{-b}{a^2-b^2}\right)i \in \mathbb{Q}[i]$$

שני: האלמנטים

$$A = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$

שלישי: $\mathbb{Q}$ הוא 2×2 מרחב וקטורי

$$\begin{array}{l} \mathbb{Q} \text{ הוא } \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \text{ בסיס } \{1, \sqrt{2}\} \\ \mathbb{Q} \text{ הוא } \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \text{ בסיס } \{1, \sqrt{3}\} \end{array}$$

לכן, הקבוצה הבאה היא $\mathbb{Q}$ מרחב וקטורי

$$1 \otimes 1, 1 \otimes \sqrt{3}, \sqrt{2} \otimes 1, \sqrt{2} \otimes \sqrt{3}$$

נראה כי $\{1 \otimes 1, 1 \otimes \sqrt{3}, \sqrt{2} \otimes 1, \sqrt{2} \otimes \sqrt{3}\}$ היא בסיס

$$(a \otimes 1 + b \otimes \sqrt{3})(c \otimes 1 + d \otimes \sqrt{3}) = 0 \quad \text{מסתבר:}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$



$$ac \otimes 1 + ad \otimes \sqrt{3} + bc \otimes \sqrt{3} + bd \otimes 3 = 0$$

$$(ac + 3bd) \otimes 1 + (ad + bc) \otimes \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac + 3bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המערכת הליניארית הזו היא:

$$c^2 - 3d^2 = 0 \quad \text{מקרה 1: } d \neq 0$$



$$d=0 \quad \Rightarrow \quad c=0 \quad \text{מקרה 2: } d=0$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 = 3$$

כל

$$c, d \neq 0$$

מקרה

$$\sqrt{3} = \pm \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \quad \text{זה}$$

$$c \neq 0 \quad \text{מקרה 3: } c \neq 0 \quad u, v \quad c$$

$$\sqrt{3} = u + v\sqrt{2} \quad /^2$$

$$3 = u^2 + 2v^2 + 2uv\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 3 \\ 2uv = 0 \end{cases}$$

$$v=0 \text{ או } u=0 \quad \text{אם } uv=0$$

מקרה

$$v=0$$

מקרה

$$u=0$$

$$v^2 = 3 \quad \text{אם } v \neq 0$$

$$u^2 = 3 \quad \text{אם } u \neq 0$$

מקרה

$$u=0$$

$$(c, d) = (0, 0) \quad \text{אם } (c, d) = (0, 0)$$

$$(c, d) \neq (0, 0) \quad \text{אם } (c, d) \neq (0, 0)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad \text{אם } (a, b) = (0, 0)$$

$$(c, d) = (0, 0) \quad \text{אם } (c, d) = (0, 0)$$

$$(a, b) = (0, 0)$$

$$(c, d) \neq (0, 0) \quad \text{אם } (c, d) \neq (0, 0)$$

לפי

$$A = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \approx \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

מקרה

מקרה

מקרה

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \approx \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

מקרה

$$A = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \approx \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

שם אבי:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

4. הראו כי:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

אינו תחבול

שם אבי:

$$\alpha = \sqrt{2} \otimes 1$$

$$\alpha^4 = 2 \cdot (1 \otimes 1)$$

$$\beta = 1 \otimes \sqrt{2}$$

$$\beta^2 = 2 \cdot (1 \otimes 1)$$

$$\Rightarrow \alpha^4 - \beta^2 = 0$$

$$(\alpha^2 - \beta)(\alpha^2 + \beta) = 0$$

אם

$$\alpha^2 = \beta = 1 \otimes \sqrt{2} \neq 0$$

אם יש טעות

אם יש טעות

5. הראו כי

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$$

- הראו כי ברורה מציג:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$= 5 + 2(\sqrt{2}\sqrt{3})$$

$$\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

נסק כי

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{6} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 6\sqrt{6}$$

$$= 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 6\sqrt{6}$$

אם $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ אינו אפס, נחלק את שני האגפים ב- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ונקבל: