

13/5/2012

תחביר II' - תרגול

1. נניח $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ו- $\mathbb{Q} \subset K$. $[K:\mathbb{Q}] = 4$ ו- $[K:\mathbb{Q}] = 4$ כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ו- $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. נניח $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ונראה שזה לא נכון.

נניח $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. אז $\sqrt{2} = a + b\sqrt{5}$ עבור $a, b \in \mathbb{Q}$. נריבוע שני צדדים ונשווה:

$2 = (a + b\sqrt{5})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2$. נשווה מקדמים של $\sqrt{5}$ ושל 1. נקבל: $2ab = 0$ ו- $a^2 + 5b^2 = 2$.
אם $a = 0$, אז $5b^2 = 2$ ו- $b^2 = 2/5$, כלומר $b = \pm\sqrt{2/5} \notin \mathbb{Q}$.
אם $b = 0$, אז $a^2 = 2$ ו- $a = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
לכן $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

$$\sqrt{2} = a_0 + a_1\sqrt{5} + a_2\sqrt{25} \Leftrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \Leftrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \Leftrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

נניח $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. אז $\sqrt{2} = a_0 + a_1\sqrt{5} + a_2\sqrt{25}$ עבור $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$. נריבוע שני צדדים ונשווה:

$$2 = (a_0 + a_1\sqrt{5} + a_2\sqrt{25})^2 = a_0^2 + 2a_0a_1\sqrt{5} + (2a_0a_2 + 5a_1^2)\sqrt{5} + 5a_2^2$$

נשווה מקדמים של $\sqrt{5}$ ושל 1. נקבל: $2a_0a_1 + 5a_2^2 = 0$ ו- $a_0^2 + 5a_2^2 = 2$.
אם $a_2 = 0$, אז $a_0^2 = 2$ ו- $a_0 = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
אם $a_2 \neq 0$, אז $5a_2^2 = 2 - a_0^2$. נניח $a_0 = 0$, אז $5a_2^2 = 2$ ו- $a_2^2 = 2/5$, כלומר $a_2 = \pm\sqrt{2/5} \notin \mathbb{Q}$.
לכן $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

$$\sqrt{2} = a_0 + a_1\sqrt{5} + a_2\sqrt{25} \quad \text{כאשר} \quad \begin{cases} a_0 = a_0\omega^0 \\ a_1\omega = a_1\omega^1 \\ a_2\omega^2 = a_2\omega^2 \end{cases}$$

$$2 = (a_0 + a_1\sqrt{5} + a_2\sqrt{25})^2 = a_0^2 + 2a_0a_1\sqrt{5} + (2a_0a_2 + 5a_1^2)\sqrt{5} + 5a_2^2$$

$$2 = a_0^2 + 2a_0a_1\sqrt{5} + (2a_0a_2 + 5a_1^2)\sqrt{5} + 5a_2^2$$

נשווה מקדמים של $\sqrt{5}$ ושל 1. נקבל: $2a_0a_1 + 5a_2^2 = 0$ ו- $a_0^2 + 5a_2^2 = 2$.
אם $a_2 = 0$, אז $a_0^2 = 2$ ו- $a_0 = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
אם $a_2 \neq 0$, אז $5a_2^2 = 2 - a_0^2$. נניח $a_0 = 0$, אז $5a_2^2 = 2$ ו- $a_2^2 = 2/5$, כלומר $a_2 = \pm\sqrt{2/5} \notin \mathbb{Q}$.
לכן $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

$$2 = a_0^2 + 2a_0a_1\sqrt{5} + (2a_0a_2 + 5a_1^2)\sqrt{5} + 5a_2^2$$

$$2 = a_0^2 + 2a_0a_1\sqrt{5} + (2a_0a_2 + 5a_1^2)\sqrt{5} + 5a_2^2$$

$$2 = a_0^2 + 2a_0a_1\sqrt{5} + (2a_0a_2 + 5a_1^2)\sqrt{5} + 5a_2^2$$

2. נניח $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ו- $\mathbb{Q} \subset K$. $[K:\mathbb{Q}] = 4$ ו- $[K:\mathbb{Q}] = 4$ כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ו- $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. נניח $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ונראה שזה לא נכון.

נניח $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. אז $\sqrt{2} = a + b\sqrt{5}$ עבור $a, b \in \mathbb{Q}$. נריבוע שני צדדים ונשווה:

$$2 = (a + b\sqrt{5})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2$$

נשווה מקדמים של $\sqrt{5}$ ושל 1. נקבל: $2ab = 0$ ו- $a^2 + 5b^2 = 2$.
אם $a = 0$, אז $5b^2 = 2$ ו- $b^2 = 2/5$, כלומר $b = \pm\sqrt{2/5} \notin \mathbb{Q}$.
אם $b = 0$, אז $a^2 = 2$ ו- $a = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
לכן $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

$$2 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2$$

$$2 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2$$

3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ is the splitting field of $x^4 - 2x^2 + 5$ over $\mathbb{Q}$, and $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ is the splitting field of $x^4 - 2x^2 + 5$ over $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ is the splitting field of $x^4 - 2x^2 + 5$ over $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ is the splitting field of $x^4 - 2x^2 + 5$ over $\mathbb{Q}$.

Let $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Then $\alpha^2 = 7 + 2\sqrt{10}$, $\alpha^4 = 49 + 28\sqrt{10} + 20 = 69 + 28\sqrt{10}$. The minimal polynomial of α over $\mathbb{Q}$ is $x^4 - 14x^2 + 1$.

Let $\beta = \sqrt{2} - \sqrt{5}$. Then $\beta^2 = 7 - 2\sqrt{10}$, $\beta^4 = 49 - 28\sqrt{10} + 20 = 69 - 28\sqrt{10}$. The minimal polynomial of β over $\mathbb{Q}$ is $x^4 - 14x^2 + 1$.

Let $\gamma = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$. Then $\gamma^2 = 7 - 2\sqrt{10}$, $\gamma^4 = 49 - 28\sqrt{10} + 20 = 69 - 28\sqrt{10}$. The minimal polynomial of γ over $\mathbb{Q}$ is $x^4 - 14x^2 + 1$.

Let $\delta = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$. Then $\delta^2 = 7 + 2\sqrt{10}$, $\delta^4 = 49 + 28\sqrt{10} + 20 = 69 + 28\sqrt{10}$. The minimal polynomial of δ over $\mathbb{Q}$ is $x^4 - 14x^2 + 1$.

Therefore, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.