

לשכל:

יהי K שדה, G קבוצת סימטריה של K .

אנחנו רוצים להראות כי $|G| \leq n$.

נסמן: $F = K^G = \{a \in K \mid \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G\}$ - שדה הפסגה של K ביחס ל- G .

אנחנו יודעים כי F הוא שדה, וכן $F \subseteq K$.

ובכן $G \leq \text{Aut}(K/F)$ (קבוצת הסימטריה של K ביחס ל- F).
כך ש $|G| \leq |\text{Aut}(K/F)|$.

הוכחה:

יהי $a \in K$.

נסמן $O_G(a) = \{\sigma(a) \mid \sigma \in G\}$ (המסלול של a תחת G).

$$|O_G(a)| \leq |G|$$

(למשל) $O_G(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$

נסמן $f(x) = (x-a_1) \cdots (x-a_r) \in K[x]$

$$= x^r - S_1 x^{r-1} + S_2 x^{r-2} - \cdots + (-1)^r S_r$$

$$S_\ell = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq r} a_{i_1} \cdots a_{i_\ell}$$

למעשה: $G(S_\ell) = S_\ell$ לכל $1 \leq \ell \leq r$ ו- $\sigma \in G$.

(כלומר: S_ℓ הוא איבר ב- F).

$$\Rightarrow S_r \in K^G = F$$

$$\Rightarrow f(x) \in F[x]$$

כלומר: $f(x)$ הוא פולינום מonic עם מקדמים ב- F , המכיל את כל האיברים a_i .

הפולינום $f(x)$ הוא מonic ב- F , ולכן $f(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים ב- K .

לכן $|G| \leq \deg f(x) = r$.

כלומר: $|G| \leq r$.

כלומר: $|G| \leq n$.

כלומר: $|G| \leq n$.

הכלל (סל) ביסודי של קורה שלמה
 מרחב K/F הדומה של K/F מממד סופי.
 קיימת התאמה מלאה בין K/F ו- K/F המקבילית:

$$S = \{ B \subset G_{K/F} \mid B \text{ מרחב} \}$$

קבוצה של קבוצות - $G_{K/F}$

$$I = \{ L \mid F \subset L \subset K \}$$

קבוצה של קבוצות - F ו- K

$$I \xrightarrow[R]{H} S$$

הפונקציה H :
 לכל $L \in I$, K/L היא הדומה של K/F
 $H(L) = G_{K/L}$

הפונקציה R :
 לכל $B \in S$, $R(B) = K^B$
 $(F \subset K^B \subset K)$

כא כן, מקיים:
 ① $H(L_1) \supset H(L_2) \Leftrightarrow L_1 \subset L_2$, $L_1, L_2 \in I$
 ② $(R(B_1) \supset R(B_2) \Leftrightarrow B_1 \subset B_2)$, $B_1, B_2 \in S$

③ $H(L_1 \cap L_2) = \langle H(L_1), H(L_2) \rangle$
 כאשר $L_1, L_2 \in I$

④ $H(\widetilde{L_1(L_2)}) = H(L_1) \cap H(L_2)$
 כאשר $L_1, L_2 \in I$

⑤ $H(\sigma(L)) = \sigma H(L) \sigma^{-1}$
 כאשר $L \in I$ ו- $\sigma \in G_{K/F}$
 הדומה של F ו- F $L \supset F \Leftrightarrow H(L) \trianglelefteq G_{K/F}$

המשקל

כא כן, ההערה

$$G_{K/F} \longrightarrow G_{L/F}$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_L$$

אילוטרופיה

$$G_{K/F} / G_{K/L} \cong G_{L/F}$$

דיווח:

ראשון, נראה $H = R^{-1}$

נניח כי $L \in I$

$$R(H(L)) = R(G_{K/L}) = K^{G_{K/L}} = L$$

לפי תוצאה זו

נניח כי $B \in S$

$$H(R(B)) = H(K^B) = G_{K/K^B} = B$$

(תוצאה זו היא
הפוכה)

נניח כי $L_1, L_2 \in I$

נניח כי $L_1, L_2 \in I$

$$\sigma|_{L_2} = \text{id}_{L_2} \text{ ש"כ, } \sigma \in H(L_2) = G_{K/L_2}$$

$$\sigma \in G_{K/L_1} = H(L_1) \text{ ולכן } \sigma|_{L_1} = \text{id}_{L_1}$$

$$B_1 \subset B_2 \subset K, B_1, B_2 \in S$$

$$K^{B_2} \subset K^{B_1}$$

$$R(B_2) \subset R(B_1)$$

$$L_1 = R(H(L_1)) \subset R(H(L_2)) = L_2 \text{ ש"כ, } H(L_1) \supset H(L_2)$$

(2) $L_1, L_2 \in I$

$$L_1 \cap L_2 \subset L_1, L_2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} H(L_1 \cap L_2) \supset H(L_1), H(L_2)$$

$$\Rightarrow H(L_1 \cap L_2) \supseteq \langle H(L_1), H(L_2) \rangle \stackrel{\text{iii}}{=} B$$

$$\Rightarrow B \supset H(L_1), H(L_2)$$

$$\Rightarrow R(B) \subset R(H(L_1)), R(H(L_2)) = L_1, L_2$$

$$\Rightarrow R(B) \subset L_1, L_2$$

$$\Rightarrow R(B) \subset L_1 \cap L_2$$

$$\Rightarrow H(R(B)) \supset H(L_1 \cap L_2)$$

$$\Rightarrow B \supset H(L_1 \cap L_2) \quad \textcircled{+}$$

$$\Rightarrow B = H(L_1 \cap L_2)$$

con

$$L_1(L_2) \supset L_1, L_2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow H(L_1(L_2)) \subset H(L_1), H(L_2)$$

$$\Rightarrow H(L_1(L_2)) \subset H(L_1) \cap H(L_2) = B \quad \textcircled{+}$$

$$B \subseteq H(L_1), H(L_2)$$

$$\Rightarrow R(B) \supseteq L_1, L_2$$

$$\Rightarrow R(B) \supseteq L_1(L_2)$$

$$\Rightarrow B \subseteq H(L_1(L_2)) \quad \textcircled{+}$$

$$\Rightarrow B = H(L_1(L_2))$$

con

$$H(\sigma(L)) = \sigma H(L) \sigma^{-1} \quad \text{if } \sigma \in G_{K/F} \quad (4)$$

$$(B(\sigma H(L) \sigma^{-1})) \cap K^{\sigma H(L) \sigma^{-1}} = \sigma(L) \quad \text{if } \sigma \in G_{K/F}$$

$$\tau \in H(L) = G_{K/L} \quad \Leftrightarrow \quad a \in K^{\sigma H(L) \sigma^{-1}}$$

$$(\sigma \tau \sigma^{-1})(a) = a \quad \text{if } a \in K^{\sigma H(L) \sigma^{-1}}$$

$$\tau \in H(L) \quad \Leftrightarrow \quad \tau(\sigma^{-1}(a)) = \sigma^{-1}(a) \quad \Leftrightarrow$$

$$\sigma^{-1}(a) \in K^{H(L)} = R(H(L)) = L \quad \Leftrightarrow$$

$$a \in \sigma(L) \quad \Leftrightarrow$$

$$R(\sigma H(L) \sigma^{-1}) = \sigma(L) \quad \text{if } \sigma \in G_{K/F}$$

$$\sigma H(L) \sigma^{-1} = H(\sigma(L)) \quad \text{if } \sigma \in G_{K/F}$$

con

~~X(5)~~

(5) נ"ה כ $L \in I$

הוא תחת F נשאב $\sigma \in G_{K/F}$

הוא $\sigma|_L$ שכן $\sigma \in G_{K/F}$

F הוא $\bar{F}$ כ L σ

כיון L - σ תחת F נשאב $\sigma|_L$

יובא $\sigma(L) = L$ כ

אכן $\sigma H(L) \sigma^{-1} = H(\sigma(L)) = H(L)$ $\sigma \in G_{K/F}$

כלומר $H(L) \triangleleft G_{K/F}$

טענה:

נ"ה $H(L) \triangleleft G_{K/F}$ כלומר $\sigma H(L) \sigma^{-1} = H(L)$

$\sigma \in G_{K/F}$ שכן

כלומר $H(\sigma(L)) = H(L)$ (4) - נ

אז $\sigma(L) = L$ $\sigma \in G_{K/F}$ שכן

אז $\tilde{\sigma} \in G_{K/F}$ שכן $(F \text{ הוא } \tilde{\sigma}: L \hookrightarrow \bar{F})$

יש בדיוק $\tilde{\sigma}$ שכן $\sigma \in G_{K/F}$

הוא $\sigma(L) = K$ אכן $\tilde{\sigma}(L) \subseteq K$

אז $\tilde{\sigma} = \sigma|_L$ אמת

אכן $\tilde{\sigma}(L) = \sigma(L) = L$

אכן L/F (נראה) (K) כ L נשאב.

סוף