

W11D2

21/05/2012

הרצאה

הרצאה של אור

יהי K שדה הרחבה של F .

$\Gamma_{K/F}$ חבורת גלואה של F מעל K

$$K^{\Gamma_{K/F}} = \{ z \in K \mid \sigma(z) = z \quad \forall \sigma \in \Gamma_{K/F} \} = F$$

משפט:

ויהי K שדה הרחבה אלגברית מעל F .

TFAE:

א. $K^{\Gamma_{K/F}} = F$

ב. H היא הרחבה נורמלית וסדרה של F

ג. $\exists$ אלמנט, הפולינום האי-פריק

ברחבה:

(א) $\Leftrightarrow$ (ג) כבר ראינו

(א) $\Leftrightarrow$ (ב): יהי אלמנט. ה' הוא הפולינום האי-פריק

א. a מעל F .

(כבר קבענו שער אלגברי $\bar{a}$ של f ונתתי $f \in K[x]$)

(נתון שיש לנו משהו נמצאים ב- K ;

נקראו ונקשרה לא- S . $S \neq \emptyset$, S כי $a \in S$.

(סמן):
$$g = \prod_{\alpha \in S} (x - \alpha) \in K[x]$$

לפי $\Gamma_{K/F}$ שם, בוחר $S' = S$, כי:

$$g(x) = \prod (x - \alpha) = \prod (x - \sigma(\alpha)) = \prod (x - \sigma(\alpha)) = g(\sigma(x))$$

מכאן, נקבעי שיש δ - $K^{\Gamma_{K/F}} = F$

ולכן $[F[x] : F] = \delta$.

קבענו כי a הוא שורש של $[F[x] : F]$, שזה פולינום מתוקן

מיוחד $\neq$ $\deg$. לכן $g(x) \equiv f(x)$.
 הפיר, רואים כי $f(x) = g(x)$ מפרס את המרחב
 וכן $\neq$ סוגי פולינום.

לע

(ג) $\Leftarrow$ (א): יהי $a \in K \setminus F$.
 נראה ש $\sigma \in \Gamma_{K/F}$ קיים $\sigma(a) \neq a$.
 יהי $f(x)$ הפולינום המינימלי של a מעל F .
 $\deg f \geq 2$. נבחר את σ כמרחיב את המרחב
 מרחב של a ב F .
 יהי $a \neq b$ שניהם של $f(x)$ $(b \in K)$.
 יהי $\sigma \in G_F$ כך ש $\sigma(a) = b$.
 כיון ש K המרחב (מרחב) של F $(N - 1)$ $(\sigma(a))$.
 $\sigma(K) = K$ וכן $\sigma|_K \in \Gamma_{K/F}$.
 $\sigma = \sigma|_K$.
 $\sigma(a) = \tilde{\sigma}(a) = b \neq a$.

לע

הצגה:

המרחב K/F המקסימלי $\leftarrow$ הרבין-
 הפקולטת המשט נקרא $[K:F]$ (המרחב של F).
 המקרה $\neq$:

$$\Gamma_{K/F} = G_{K/F}$$

סימן: K/F - K המרחב של F

דלגלי הקלוא י' 1781 נון:
 (1) נניח כי K/F הרמה של K מעל F סופי. אזי:
 $|G_{K/F}| = [K:F]$

(2) רמז $\bar{F}$ צ'ס קטנה אברהם
 סברבילם F מה $(\bar{F}_S)$ (לומר)
 אזי, הרמה קטנה של F קטנה על $\bar{F}$
 פיו הרמה של F .

(3) שדה סגור F מה F של קטנה פאקטור
 סברבילם $F[x]$ מה F הרמה של F .

(4) $\bar{F}_S \subset \bar{F}$ (הוא הרמה של F של F)

לסבר
 רמז E הרמה של F ,
 נניח כי $F \subset K \subset E$ אז שדה סופי
 מה F סופי מה F .
 אז L הרמה של L מה F .
 סופי מה F קטנה $F \subset K \subset L \subset E$.

הוכחה:
 נניח שהרמה קטנה L של F קטנה על K .
 נשער שכל מה K של F סופי;
 כאן $K \subset L \subset E$ (כי $K = F(S)$, $L = F(S) \subset E$)
 נון E סברבילם מה F . גם L סברבילם מה F .
 לכן L/F הרמה קטנה וסופי, כלומר
 הרמה של F .

הסדרה F_n של K , וכן E/K דומה לזה.

$$G_{E/K} \cong G_{E/K}$$

$$|G_{E/K}| \leq n!$$

קיבולן או הצגה:

$$G_{E/K} \hookrightarrow S_n$$

ב- σ מראה $\forall \sigma \in S_n$ נמצא σ אלוהי E על E

$$\sigma(\varphi(z_1, \dots, z_n)) = \varphi(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)})$$

כן σ מראה אלוהי E של K , כי

$$\sigma(S_i(z_1, \dots, z_n)) = S_i(z_1, \dots, z_n)$$

וכן, σ מראה $\forall \sigma \in S_n$ נמצא σ אלוהי

כי $G_{E/K}$ אלוהי E של K

$$S_n \hookrightarrow G_{E/K}$$

$$E^{G_{E/K}} = K \iff E \text{ אלוהי } K$$

$$F(z_1, \dots, z_n)^{S_n} = F(S_1, \dots, S_n)$$