

סיכום בחדו"א

אינטגרלים:

פונקציה קדומה:

- פונקציה F תקרא הקדומה של f בקטע מסוים אם F גזירה בכול הקטע ומתקיים $F' = f$ בכול הקטע והגבולות בקצוות שווים.
- נשים לב שלא לכול פונקציה יש קדומה, בפרט מתכונת דרבו נגזרות מקיימות ערך הביניים, ולכן כול פונקציה שלא מקיימת זו לא תוכל שיהיה לה קדומה.
- פונקציות קדומות לאותה הפונקציה נבדלות בקבוע. מיחידות הנגזרת לפונקצית האפס, שהיא פונקציה ההפרש.
- האינטגרל הלא מסוים של פונקציה זה משפחת הפונקציות שהן הקדומות שלה.
- אם לשתי פונקציות יש קדומה אז גם לסכום שלהם, וגם למכפלה שלהן בקבוע יש קדומה מלינאריות הנגזרת.
- אינטגרציה בחלקים: $\int f g' = f g - \int f' g$ נובע מיידית מגזירה של מכפלה. נדרוש שאף g גזירה ושהנגזרת אינטגרלית.
- החלפת משתנים: מכלל השרשרת לנגזרת נובע $\int f(g(x)) * g'(x) dx = \int f(t) dt$ כאשר $g(x) = t$. אפשר F היא הקדומה של f . כלומר $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt$ כאשר $g(x) = t$. אפשר להשתמש בכלל הזה בשני הכיוונים. אחד בהננת אינטגרל של הרכבה כפול הנגזרת הפנימית נעבור לאינטגרל פשוט עם t . והשני בהננת פונקציה נרצה בכוח להפוך אותה להרכבה כפול נגזרת פנימית כדי שדברים יצטמצמו, במקרה הזה צריך לוודא שהפונקציה שקושרת את x למשתנה המחליף היא הפיכה.
- פונקציות רציונליות:
 - פונקציה רציונלית: $f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ כאשר $Q \in \mathbb{R}$ פולינומים. אם המונה ממעלה קטנה מהמכנה היא תקרא פשוטה. אם היא מהצורה מספר חלקי ביטוי לינארית בחזקה, או ביטוי לינארי חלקי ביטוי ריבועי אי פריק בחזקה היא תקרא יסודית.
 - אלגוריתם לפתרון אינטגרל בעזרת פונקציות רציונליות:
 - בהננת אינטגרל נחפש הצבות שיעבירו אותנו לאינטגרל של פונקציה רציונלית
- $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ אז נציב $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ונקבל שאיקס הוא פונקציה רציונלית ב t וגם הנגזרת של איקס כזו. אם יש כמה שורשים כאלה של אותו הגורם אבל מסדרים שונים, נציב השורש שהוא ה lcm שלהם.
- עבור סינוס וקוסינוס נציב $t = \tan(\frac{x}{2})$ ונקבל קשר בין סינוס וקוסינוס ל t באופן רציונלי. הקשרים נובעים מחצאי זווית.
- עבור $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ נשתמש בהצבת אוילר. הרעיון הוא לייצר קשר בין t ל x כך שאיקס יהיה לינארי בקשר הזה, ולא ריבועי. לכן אם a חיובי נציב $t - \sqrt{ax} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ואז אם נעלה בריבוע את שני האגפים נקבל את איקס במעלה אחת. אם c חיובי נציב $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$
- נבצע חילוק פולינומים לקבלת פונקציה רציונלית פשוטה
- נעשה שברים חלקים לקבלת סכום פונקציות רציונליות יסודיות.

- נפתור האנטגרל שהתקבל בעזרת ידע על פונקציות רציונליות. עבור גורמים לינארים זה קל, עבור גורם ריבועי במכנה משלימים לריבוע כך שהמונה יכיל את הנגזרת של המכנה.

אינטגרל מסוים:

הגדרות:

- חלוקה: בהנתן קטע $[a, b]$ חלוקה שלו היא קבוצה סופית של נקודות שונות $\{x_0, \dots, x_n\}$ כך ש $x_0 = a, x_n = b$ וכול שאר הנקודות ממוספרות בסדר עולה. זה מחלק הקטע לתת קטעים.
- עדינות: בהנתן חלוקה π נסמן $\lambda(\pi)$ להיות האורך המקסימלי של תת קטע בחלוקה.
- עידון: בהנתן חלוקה, עידון שלה זה חלוקה המכילה אותה, כלומר חלוקה שמתקבלת מהוספת נקודות לחלוקה הנוכחית. בברור החלוקה החדשה עדינה יותר (חלש).
- נקודות מתאימות: קבוצה של נקודות מתאימות לחלוקה אם הם מקיימות שהכמות שלהן היא ככמות הקטעים בחלוקה, וכול נקודה שייכת לתת קטע סגור אחר.
- סכום רימאן: $S(f, \pi, \{t_i\}) = \sum_{i=0}^n f(t_i) \Delta x_i$. כלומר בהנתן פונקציה על קטע, חלוקה, ונקודות מתאימות נדגום את ערכי הפונקציה בנקודות המתאימות ונכפיל באורך הקטע שממנו דגמנו. מעין ממוצע.
- אינטגרליות: $f: [a, b] \rightarrow R$ תקרא אינטגרלית אם קיים מספר $I \in R$ כך שלכול $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכול חלוקה עדינה מ δ , ולכול בחירה של נקודות מתאימות לחלוקה יתקיים שהמרחק בין סכום רימאן למספר I קטן מאפסילון. אז נאמר ש I הוא האינטגרל בקטע. $\exists I: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \pi s.t. \lambda(\pi) < \delta \text{ and } \forall \{t_i\}: |S(f, \pi, \{t_i\}) - I| < \varepsilon$ $\circ$ אפשר לחשוב על האנטגרל כגבול של סכום רימאן כשהעדינות שואפת לאפס.
- סכומי דארבו: $\bar{S}(f, \pi) = \sum (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f) \Delta x$. כלומר סכום דארבו עליון בהנתן חלוקה זה לקחת בכול קטע את הערך הסופרמלי ולסכום אותם כממוצע על אורכי הקטעים. באופן שקול מגדירים סכום דארבו תחתון.
- אינטגרל עליון/תחתון: $\bar{I}(f) = \inf_{\pi} \bar{S}(f, \pi)$ ובאופן שקול גם אינטגרל תחתון. כלומר נסתכל על כול החלוקות האפשריות של הקטע ונכך את האינפימום של סכומי דארבו העליונים ונקרא לזה האינטגרל העליון. (או הסופרימום של סכומי דארבו התחתונים) באיזשהו מובן נחפש את ההתקרבות הטובה ביותר מלמעה (האינטגרל העליון) וההתקרבות הטובה ביותר מלמטה (אינטגרל תחתון). מתכונות הסופ מתקיים שלכול חלוקה שהיא
$$\underline{S}(f, \pi) \leq I(f) \leq \bar{I}(f) \leq \bar{S}(f, \pi)$$
- תנודה של פונקציה על קטע: $\omega(f, J) = \sup_J f - \inf_J f$ כלומר ההפרש הכי גדול בין שני ערכים של הפונקציה בקטע.
- תנודה של פונקציה ביחס לחלוקה: למעשה זה ההפרש בין סכום דארבו העליון לסכום דארבו התחתון כלומר
$$\omega(f, \pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i$$

טענות:

- פונקציה אינטגרלית היא חסומה. נובע מבחירה חלוקה מסוימת, וחסומת סכום רימאן מלמעלה ומלמטה על ידי האינטגרל והסטייה אפסילון ואז העברת אגפים נכונה מראה שבכול תת קטע הפונקציה חסומה, ולכן חסומה על כול הקטע.
- בהנתן חלוקה של קטע אז למעשה סכום דארבו עליון ותחתון הם הסופרימום והאינפימום של סכומי רימאן על כול הבחירות האפשריות של נקודות מתאימות. נובע מכך שלכול אפסילון אפשר לבחור בכול תת קטע נקודה שקרובה עד כדי אפסילון חלקי אורך הקטע לסופרימום/אינפימום בקטע עצמו, ולכן הסכום שלהם יהיה קרוב עד כדי אפסילון לסכום הסופרימומים.

- מונטוניות סכומי דארבו: עבור חלוקה, וחלוקה שהיא עידון שלה אז העידון רק מקטין את סכום דארבו העליון, או מגדיל את סכום דארבו התחתון (חלש...) כי סופרמום על קטע, גדול שווה מהסופרמום על כול תת קטע שלו, והאינפימום קטן מהאינפימום על כול תת קטע. ולכן נובע שלכול שתי חלוקות סכום דארבו העליון של אחת גדול מסכום דארבו התחתון של השנייה, מלקיחת חלוקה שהיא האיחוד שלהן.
- קריטריון דארבו: פונקציה חסומה היא אינטגרלית בקטע סגור אם"מ לכול אפסילון קיים דלתא כך שלכול חלוקה עדינה מדלתא ההפרש בין סכום דארבו העליון שלה לסכום דארבו התחתון קטן מאפסילון. אם היא רימאן אז קיים מספר שהסכום רימאן קרוב אליו עד כדי אפסילון לכול אפסילון. נבחר אפסילון חלקי שתיים וייתקים שההפרש בין סכומי דארבו, מהיותם הסופרימום על סכומי רימאן, קטן מאפסילון עבור החלוקה שעדינה מדלתא. אם היא מקיימת דארבו נובע שהאנטגרל העליון שווה לאנטגרל התחתון, ושסכומי רימאן נבדלים באפסילון לכול אפסילון. ולכן סכום רימאן, לכול חלוקה עדינה מהדלתא הנתון מהקריטריון ולכול בחירה נקודות, קטן מסכום דארבו העליון לאותה החלוקה קטן מסכום דארבו התחתון ועוד אפסילון קטן מהערך המשותף של האינטגרל העליון והתחתון ועוד אפסילון, וגדול מסכום דארבו התחתון שגדול מסכום דארבו העליון פחות אפסילון שגדול מהערך המשותף של האינטגרל העליון והתחתון פחות אפסילון. ולכן מתקיים אינטגרלית רימאן.
- בהנתן שפונקציה אינטגרלית בקטע סגור אז לכול סדרה של חלוקות שהעדינות שואפת לאפס ולכול סדרת נקודות מתאימות שתואמות לסדרה החלוקות יתקיים שסכום דארבו על הסדרה הזו שואף לאינטגרל בקטע. נובע מההגדרה מיידית, אם הפונקציה אינטגרלית אז לכול אפסילון קיימת עדינות סף שהחל ממנה הסכום רימאן קרוב לאינטגרל עד כדי אפסילון, ולכן משום שסדרת החלוקות עם עדינות שואפת לאפס יש מקום בסדרה שהחל ממנו כול הסכומי רימאן יהיה קרובים לאינטגרל עד כדי אפסילון.
- סכומי דארבו בעידון: $\overline{\Sigma}(f, \pi) \leq \overline{\Sigma}(f, \pi') + \lambda(\pi)\omega(f, [a, b])$ כאשר π' חלוקה שהיא תוספת של נקודה אחת ל π . נובע מכך ששינינו רק קטע אחד, ובקטע הזה השינוי לא יכול להיות יותר מהתנודה המקסימלית כפול אורך הקטע. כנל לגבי סכום דארבו תחתון.
- הקשר בין אינטגרל עליון/תחתון לסכום דארבו עליון/תחתון: עבור פונקציה חסומה על קטע סגור לכול אפסילון קיים דלתא כך שלכול חלוקה עדינה מדלתא האינטגרל העליון חסום בין סכום דארבו העליון לסכום דארבו העליון פחות אפסילון. כנ"ל לאינטגרל תחתון. עבור אינטגרל עליון הוא אינפימום אז קיימת חלוקה עבורה הסכום דארבו פחות אפסילון חצי קטן מהאינטגרל העליון. לחלוקה הזו יש כמו מסוימת של נקודות, נבחר דלתא שתתאים בדיוק לכמות הזו ולעדינות של החלוקה הזו כך שלכול חלוקה עדינה מדלתא כשנאחד אותה עם החלוקה הזו ונקבל חלוקה עוד יותר עדינה, הקשר בין סכומי דארבו העליונים נתון בטענה לעיל, נקבל את הצד השני של אי השוויון עם האינטגרל העליון.
- אם האינטגרל העליון שווה לתחתון עבור פונקציה חסומה על קטע סגור, הפונקציה אינטגרלית, כי מהטענה לעיל יתקיים קריטריון דארבו לאינטגרליות רימאן.
- קריטריון דארבו המשופר: עבור פונקציה חסומה על קטע סגור אם לכול אפסילון קיימת חלוקה כלשהי שהתנודה קטנה מאפסילון אז הפונקציה אינטגרלית, כי זה גורר שהאינטגרל התחתון והעליון שווים, כי הם רחוקים עד כדי אפסילון לכול אפסילון.
- רציפות גורר אינטגרליות: פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה, ולכן לכול אפסילון קיימת דלתא כך שאם נחלק את הקטע שלנו לקטעים קטנים מדלתא מובטח שהפונקציה לא משתגעת יותר מאפסילון חלקי מה שצריך. ולכן קיימת דלתא שהחל ממנה לכול חלוקה עדינה התנודה על הקטע קטנה מאפסילון ולכן מדארבו...
- מונטוניות גורר אינטגרליות: פונקציה מונטונית וחסומה על קטע סגור אינטגרלית. לכול אפסילון נבחר דלתא להיות אפסילון חלקי ההפרש בין ערכי הפונקציה בקצוות (בה"כ היא לא קבועה) אז נשים לב שהתנודה של הפונקציה על הקטע היא בדיוק דלתא כפול הפרשי הקצוות, כי ממונטוניות השינוי על הקטע כולו הוא השינוי בקצוות.
- איחוד קטעים/משפטים מבניים:

- פונקציה חסומה על קטע סגור, שהיא אינטגרבילית על שני חצאים שלו, אינטגרבילית על כולו. נסתכל על חלוקה של חצי אחד שעבורה העדינות קטנה מאפסילון חצי, נסתכל על חלוקה של החצי השני שגם אצלה התנודה קטנה מאפסילון חצי, אז האיחוד שלהם זה חלוקה של כול הקטע, והתנודה בקטע כולו זה סכום התנודות, לכן קטן מאפסילון.
- פונקציה חסומה בקטע סגור שאינטגרבילית על כול תת קטע סגור שמאלי, אינטגרבילית על כול הקטע. כי לכול אפסילון נבחר תת קטע שמאלי קרוב לקצה עד כדי אפסילון חלקי התנודה של הפונקציה על הקטע כולו, נסתכל על חלוקה של תת הקטע, הפונקציה אינטגרבילית שם ולכן התנודה קטנה מאפסילון חצי, נסיף את הקצה, נקבל שהתנודה גדלה בגודל הקטע שהוספנו כפול התנודה, אבל דאגו שגודל הקטע יהיה אפסילון חלקי התנודה. לכן סה"כ התנודה על כול הקטע קטנה מאפסילון ולכן מדאברו יש אינטגרביליות.
- שינוי פונקציה בנקודה אחת לא משנה את האינטגרביליות שלה, וזה משום שנתקרב לנקודה משמאל עם תת קטעים שבהם היא כן אינטגרבילית ולכן מטענה לעיל היא אינטגרבילית על תת הקטע השמאלי, כנל עבור הימני ומהטענה הראשונה על איחוד היא אינטגרבילית על כול הקטע, ולכן שינוי בערך בנקודה לא השפיע על האינטגרביליות.
- סכום אינטגרביליות, מכפלתן, וערך מוחלט כולן אינטגרביליות.
- פונקציות אינטגרביליות שמזדהות על קבוצה צפופה יש להן אותו אינטגרל: נובע מהעובדה שאינטגרל הוא הגבול של סכומי רימאן כשהעדינות שואפת לאפס, ולכן נקח סדרה של חלוקות שהעדינות שואפת לאפס ונבחר את הנקודות המתאימות להיות בקבוצה הצפופה, אז הפונקציות מזדהות ולכן גם סכומי רימאן. ולכן שינוי של פונקציה במספר סופי של נקודות לא משנה האינטגרל, ואם שינוי במספר בן מנייה של נקודות ועדיין הפונקציה נשארה אינטגרבילית אז האינטגרל נשמר.
- לינאריות האינטגרל:
 - האינטגרל לינארי באינטגרנד, נובע מלינאריות סכומי רימאן מהיותם סכומים סופיים, ולקיחת גבול.
 - האינטגרל לינארי בתחום, עבור אותו האינטגרנד. נובע מלקיחת סדרת חלוקות עם עדינות שואפת לאפס שמכילות את נקודת המפגש, ואז פיצול סכום רימאן לשתיים ולקיחת גבול.
- מונוטוניות האינטגרל:
 - $f \geq 0$ אינטגרבילית ב $[a, b]$ $\int_a^b f \geq 0$ נובע כי סכומי רימאן יהיו כול הזמן חיוביים ולכן גם בגבול. ושוויון אמ"מ בכול תת קטע סגור מתקיים שהאינפימום שלה הוא אפס.
 - $f \geq g$ ושתיהן אינטגרביליות אז מהטענה לעיל $\int_a^b f \geq \int_a^b g$
- רציפות האינטגרל המסוים: עבור f אינט' בקטע $[a, b]$ אז $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ היא פונקציה רציפה. נובע מהגדרת רציפות, והעובדה ש f חסומה מהיותה אינט' ומאדיטיבייות האינטגרל בתחום האינטגרציה.
- משפטי ערך הביניים:
 - $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \sup_{[a,b]} |f| (b-a)$ נובע ממונוטוניות האינטגרל והעובדה שהערך המוחלט אינט' וגדול מהערך עצמו. כמו כן $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ כאשר m, M החסמים של הפונקציה, ולכן אם היא רציפה יש נקודה שבה היא מקבלת את הערך הממוצע.
 - f רציפה בקטע סגור ו g אינטגרבילית ואי שלילית אז קיים x_0 בקטע כך שם $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_a^b g(x)dx$ חסומים את אינטגרל המכפלה על ידי החסמים של אף כפול האינטגרל של ג', מחלקים שני האגפים באינטגרל ג' ומקבלים מספר שנמצא בין חסמי הפונקציה אף ולכן מרציפות הוא מתקבל.

- הלמה של בונה 1: f מונוטונית ו g אי שלילית ואינטגרבילית אז יש נקודה בקטע הסגור כך ש $\int_a^b fg = f(a) \int_a^{x_0} g + f(b) \int_{x_0}^b g$. ממנוטונויות אף נחסום את אינטגרל המכפלה משני הצדדים על ידי ערכי אף בקצה והאינטגרל של ג'. לכן אינטגרל המכפלה הוא צירוף קמור שלהם, אז נבחר את הנקודה x_0 להיות זו שהאינטגרל של ג' עד אליה זה החלק מהאינטגרל על כול הקטע כמקדם בצירוף הקמור, קיימת נקודה כזו מרציפות האינטגרל המסוים.
 - הלמה של בונה 2: עבור g רציפה ו f גזירה ברציפות שנגזרתה אי שלילית בקטע אז קיימת נקודה $\int_a^b fg = f(a) \int_a^{x_0} g + f(b) \int_{x_0}^b g$. הקדומה של g זה בדיוק פונקציית האינטגרל משום ש g רציפה ולכן מאנטגרציה בחלקים נקבל $\int_a^b fg = \int_a^b G'f = G(b)f(b) - G(a)f(a) - \int_a^b Gf'$. נפעיל את ערך הביניים הראשון על האינטגרל שנשאר מחיוביות f' , ונקבל הדרוש.
 - המשפטים היסודיים של החדוא:
 - המשפט היסודי: f פונקציה אינטגרבילית בקטע סגור ורציפה בנקודה x_0 אז $F(x) = \int_a^x f$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים $F'(x_0) = f(x_0)$. מוכיחים ישירות מהגדרת הנגזרת, ומהעובדה שהפונקציה רציפה בנקודה, ולכן כאשר מתקרבים אז ערכי הפונקציה גם מתקרבים.
 - ניוטון לייבניץ: עבור f אינטגרבילית ב $[a, b]$ אם F קדומה לה בכול הקטע אז מתקיים $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. נובע מחישוב ערך הביניים של לגראנג' לפונקציה הקדומה על כול תת קטע בחלוקה ובחירת הנקודות המתאימות להיות בדיוק הנקודות שמתקבלות מלגראנג' ואז מסכימת רימאן של כול הנקודות האלה נקבל שהסכום הוא בדיוק הפרש הקצוות של הקדומה, ואז מאינטגרביליות אין חשיבות לבחירה הנקודות המתאימות, וכהעדינות תשאף לאפס זה יהיה האנטגרל.
 - הרכבה: נשים לב שהרכבה של אינטגרביליות אינה בהכרח אינטגרבילית אבל: עבור f אינטגרבילית על קטע g פונקציה רציפה בכול R (בתמונה של $f \dots$) אז ההרכבה אינטגרבילית, $f \circ g$. תהי חלוקה כלשהי של הקטע, נחלק אותה לתת קטעים טובים ותת קטעים רעים, כאשר הטובים הם הקטעים בהם התנודה של אף קטנה מהדלתא שמבטיחה שערכי ג' קרובים מרציפות במש של ג'. והרעים הם אלה שהתנודה גדולה מדלתא. מאינטגרביליות אף סך כול התנודה קטנה כרצוננו ולכן ניתן לחסום את אורכי הקטעים הרעים, ולכן התנודה של ההרכבה תהיה סכום התנודות על הקטעים הטובים והרעים. בטובים התנודה קטנה מרציפות במש של ג' והרעים חסומים על ידי החסם של ג' כפול אורכי הקטעים, אבל חסמנו את אורך הקטעים.
 - הרכבה של אינטגרבילית ולינארית תמיד אינטגרבילית.
 - החלפת משתנה: $f: [a, b] \rightarrow R$ רציפה, $\Psi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ המקיימת $\Psi(\alpha) = a$ וכמו כן $\Psi(\beta) = b$ וגם Ψ גזירה ברציפות אז $\int_a^b f(\Psi(x))\Psi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. ההוכחה מכלל השרשרת לנגזרת. $G(y) = F(\Psi(y)) \rightarrow G'(y) = F'(\Psi(y))\Psi'(y)$. כאשר F הקדומה של f מרציפות f . ולכן $\int_\alpha^\beta F'(\Psi(y))\Psi'(y) = \int_\alpha^\beta G'(y) = G(\beta) - G(\alpha) = F(\Psi(\beta)) - F(\Psi(\alpha))$ ולכן $\int_\alpha^\beta F'(\Psi(y))\Psi'(y) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$
 - שימוש באנטגרל לחישוב סכום: לעיתים כשיש סכום אינסופי ניתן לפרש אותו כגבול של סכומי רימאן ולחשב האינטגרל במקום. בדרך כלל ננסה למצוא חלוקה של הקטע $[0, 1]$
- אינטגרל לא אמיתי: נשים לב שההגדרה עד עכשיו לא מאפשרת אינטגרל של פונקציה בקטע לא סופי וסגור, או אינטגרל של פונקציה לא חסומה.

- אינטגרל בקטע אינסופי: $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח שלכול $b \in (a, \infty)$ מתקיים ש $f \in R([a, b])$ אז נגדיר $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$. עבור קטע דו איסופי נפצל את האינטגרל לסכום אינטגרלים על קטעים חד אינסופיים, והאינטגרל קיים אם"מ שניהם מתכנסים, או מתבדים לאינסוף בסימנים זהים.
- אינטגרל בקטע פתוח: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח שלכול $c \in (a, b)$ מתקיים $f \in R([a, c])$ אז נסמן $\int_a^b f := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b+\varepsilon} f$ וכנ"ל עבור צד שמאל של הקטע.
- שמירת משפטים מאינטגרל רגיל: נשים לב שמרבית המשפטים נשמרים גם לאינטגרלים לא אמיתיים פשוט מביצוע המשפט על כול תת קטע בו היא אינטגרלית ולקחת גבול. לכן יש ניוטון לייבניץ, אינטגרציה בחלקים, החלפת משתנה, מונטוניות ולינאריות.
- קריטריון קושי להתכנסות: $f: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית על כול תת קטע אז $\int_a^\omega f$ מתכנס אם"מ $\forall \varepsilon > 0: \exists B$ s.t. $\forall b_1, b_2 \in [B, \omega): \int_{b_1}^{b_2} f < \varepsilon$. נובע מקריטריון קושי לקיום הגבול בקצה של הפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ כלומר לפונקציה יהיה גבול ב ω אם"מ הגדרת הגבול לפי סדרות אם"מ מתקיים קריטריון קושי להתכנסות סדרות.
- שינוי הפונקציה על קטע סופי וסגור כך שעדיין תשאר אינטגרלית בכול תת קטע, לא ישנה את קיום האינטגרל הלא אמיתי, אלא רק את ערכו, ממש כמו שינוי התחלה של טור מתכנס. נובע מידית מקושי.
- התכנסות בהחלט: $f: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית בכול תת קטע. נאמר ש $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\omega |f|$ מתכנס, לערך סופי. התכנסות בהחלט גוררת התכנסות בתנאי, מקריטריון קושי וא"ש המשולש לאינטגרלים.
- אינטגרלים לא אמיתיים של פונקציות חיוביות: (שליליות בה"כ) ממש כמו בטורים אם הפונקציה חיובית אז השאלה היא רק האם האינטגרל מתבדר לאינסוף או מתכנס למספר סופי, אין עניין של ביטולים.
- $\int_a^\omega f$ מתכנס אם"מ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ חסומה. משום שאף חיובית אז הקדומה מונו עולה ולכן אם היא חסומה יש גבול. בכיוון הפוך אם הוא מתכנס, אז זו פונקציה מתכנסת ורציפה ולכן חסומה בקטע.
- מבחן השוואה: אם f, g שתיהן אינן על כול תת קטע סגור ומתקיים $f \leq g$ ושתיהן חיוביות אז אם האינטגרל הלא אמיתי של g מתכנס אז גם של f , ומקונטרה פוזיציה אם האינטגרל הלא אמיתי של f מתבדר גם של g יתבדר. נובע מידית מהמשפט לעיל, אם האינטגרל של g מתכנס אז הקדומה חסומה, הקדומה של f קטנה מהקדומה של g ולכן גם חסומה.
- השוואה לטור: עבור פונקציה מונו יורדת בקטע אחד עד אינסוף ניתן להשוות האינטגרל שלה לטור האינסופי על הערכים שהיא מקבלת במספרים החיוביים. זה שקול ללסכום את המלבנים שחוסמים את הפונקציה מלמעלה ומלמטה, ולכן האינטגרל חסום מלמעלה על ידי הטור, ומלמטה על ידי הטור שהתחיל משתיים (כי זה המלבנים הקטנים) ולכן האינטגרל מתכנס אם"מ הטור מתכנס.
- מבחן ההשוואה הגבולי: עבור f, g שתי פונקציות אי שלילות ו x_0 הקנודה הבעייתית של האינטגרל אז $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ אם L סופי שונה מאפס הם מתכנסים ומתבדרים יחד. אם הוא אפס אז אם g מתכנס גם f יתכנס אם הוא אינסוף אז אם f מתכנס אז גם g מתכנס.
- פונקציות עוגן:
 - כאשר $a > 0$ מתבדר עבור $a \leq 1$ ומתכנס אחרת. $\int_a^\infty \frac{dx}{x^a}$
 - מתכנס אם"מ $a < 1$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^a}$
- אינטגרלים לא אמיתיים של פונקציות לא בהכרח חיוביות:

- אבל: $g, f: [a, \omega) \rightarrow R$ אינט' בכול תת קטע, f מונטונית גזירה ברציפות ו g רציפה. אם f חסומה והאנטגרל הלא אמיתי של g קיים וסופי אז $\int_a^\omega fg$ קיים וסופי. מוכיחים בעזרת ערך הביניים של בונה, וקריטריון קושי.
- דירכלה: $g, f: [a, \omega) \rightarrow R$ אינט' בכול תת קטע, f מונטונית גזירה ברציפות ו g רציפה. אם אף מונו שואפת לאפס בגבול ו $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ חסומה אז $\int_a^\omega fg$ קיים וסופי. שוב מוכיחים עם ערך הביניים של בונה וקריטריון קושי אבל מחליפים תפקידים. כלומר עבור אבל f החסומה ו g שואפת. ואילו בדירכלה g חסומה ואף זאת שמאפסת.

סדרות וטורי פונקציות:

- התכנסות נקודתית: נאמר ש $f_n: [a, b] \rightarrow R$ שואפת נקודתית לפונקציה f אם $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ לכול איקס בקטע (בנפרד). נשים לב שהתכנסות נקודתית לא משמרת שום תכונה טובה של סדרת הפונקציות.
- התכנסות במש: I קטע מוכלל ו $f_n: I \rightarrow R$ סדרת פונקציות, נאמר שהסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה f אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ כלומר שמתקדמים בסדרה אז המרחק המקסימלי בין הערך של הסדרה לערך של הפונקציה אליה שואפים עבור כל הנקודות הולך לאפס. $\forall \varepsilon \exists N : \forall x \in I \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. נשים לב שזו תכונה שתלויה בתחום המדובר, אותה הסדרה יכולה להתכנס במ"ש בתחום מסוים ולא במ"ש בתחום אחר.
- שלילת התכנסות במ"ש: משלילת הפסוק לעיל נגלה שכדי להוכיח שסדרת פונקציות אינה מתכנסת במ"ש צריך להוכיח שיש מרחק מסוים שעבורו קיימת סדרה אינסופית של נקודות ותת סדרה של פונקציות עבורן הנקודות הללו מייצרות ערכים שרחוקים מהערכים של הפונקציה הגבולית על הנקודות הללו יותר מהמרחק המסוים.
- שיטה להתמודדות עם במ"ש: נמצא מועמד לפונקציה הגבולית ונגזור את פונקציית ההפרש ונחפש לה נקודות קיצון. אם ערכי הפונקציה בנקודות הקיצון הללו שואפים לאפס אז זה כנראה במ"ש, אם לא אז אין התכנסות במ"ש.
- התכנסות במ"ש גורר התכנסות נקודתית: מיידית מהגדרה. כמו כן שינוי במספר סופי של איברים את סדרת הפונקציות לא משפיע על התכנסות במידה שווה.
- חסימות במידה אחידה: סדרת פונקציות היא חסומה במידה אחידה אם קיים מספר אחד החוסם את כול הפונקציות. אם סדרה חסומה במידה אחידה מתכנסת במ"ש אז הפונקציה הגבולית חסומה על ידי אותו חסם. אם יש סדרה של פונקציות ששואפות במ"ש לפונקציה חסומה אז הן חסומות במידה אחידה (ה"ממ, יכול להיות שהראשונות אפילו לא חסומות, סתם לקטע...)
- עבור שתי סדרות פונקציות חסומות במידה אחידה ומתכנסות במ"ש לפונקציה כלשהי (כל אחת בנפרד) אז המכפלה של הגבולות היא גבול המכפלה. נובע מהטריק הידוע של להוסיף ולהחסיר את המכפלה, ושימוש בחסם. אם הן לא חסומות במידה אחידה זה לא נכון!
- קריטריון קושי: סדרת פונקציות מתכנסת לפונקציה כלשהי במידה שווה אם"מ החל ממקום מסוים כול שתי פונקציות בסדרה קרובות עד כדי אפסילון בכול הקטע, כלומר לכול איקס.
- גבול במ"ש של רציפות הוא רציף/ החלפת גבול וגבול: לכול אפסילון קיים אן שהחל ממנו ערכי הפונקציה בסדרה קרובים עד כדי אפסילון לערכי פונקציה הגבול ולכן לכול איקס אפס מתקיים $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)|$ ולכן החל ממקום מסוים כול הביטויים האלה קטנים, עבור איקסים שקרובים מספיק לאיקס אפס, מרציפות הסדרה. נשים לב שזו תכונה נקודתית, כלומר לכול נקודה שבה הפונקציות רציפות זה מתקיים. המשמעות היא שניתן להחליף בין הגבולות $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$
- קריטריון דיני: $f_n: [a, b] \rightarrow R$ פונקציות רציפות, הסדרה שואפת נקודתית לפונקציה רציפה, ולכול איקס הסדרה $\{f_i(x)\}_{i=1}^\infty$ מונו יורדת. אז ההתכנסות היא במ"ש.

- למה של היינה ובורל: גרסא פשוטה של משפט התת כיסוי הסופי שאומרת שלקטע סגור שיש לו כיסוי פתוח אז יש לו תת כיסוי סופי.
- הוכחה: לכול איקס קיים אינדקס שהחל ממנו הערך של הפונקציה בסדרה עליו קרוב לערך פונקצית הגבול עליו משאיפה נקודתית. מרציפות נובע שקיימת סביבה שזה נכון בה (וגם ממונטוניות), ולכן הסביבות האלה הן הכיסוי, ולכן יש תת כיסוי סופי, ולכן נקח המקסימום בין האינדקסים הדרושים כדי לייצר הסביבות האלה, ולכן לכול איבר הוא יהיה באיזשהי סביבה ולכן תהיה התכנסות במש.
- גבול ואנטגרל: $f_n: [a, b] \rightarrow R$ סדרת פונקציות אינטגרביליות שמתכנסת במ"ש לפונקציה f אז f אינטגרבילית ומתקיים $\int (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\int f_n(x) dx)$. השאיפה היא במ"ש ולכן רחוק מספיק בסדרה הפונקציות קרובות עד כדי אפסילון רבע לכול אפסילון, ולכן הבדלי התנודות בינהן על כול קטע הוא לכול היותר אפסילון חצי. משום שהפונקציות אינט' אז יש חלוקה שמספקת את התנודה שלהן לעד אפסילון חצי ולכן התנודה של הפונקציה הגבולית על אותה חלוקה תהיה לכול היותר אפסילון, ולכן מקריטריון דארבו היא אינטגרבילית. כמו כן מתקיים $\int_a^b f(x) - \int_a^b f_n(x) \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ ולכן סדרת האינטגרלים (כסדרת מספרים) שואפת לאינטגרל של פונקצית הגבול.
- מז'ורנטה: נשים לב כי הנאמר לעיל תקף לאינטגרלים אמיתיים, אולם עבור אינטגרלים לא אמיתיים צריך עוד תנאי. $f_n: [a, w) \rightarrow R$ אינט' בכול תת קטע סגור וכמו כן האינטגרל של כול אחת מהן מתכנס. ונניח כי בכול תת קטע סגור הסדרה שואפת במ"ש ל f . וקיימת פונקצית מז'ורנטה $\Psi: [a, w) \rightarrow R$ אינטגרבילית בכול תת קטע סגור שחוסמת את הסדרה מלמעלה בצורה אחידה כלומר $|f_n| \leq \Psi$ וגם האינטגרל שלה מתכנס אז פונקציית הגבול אינטגרבילית בכול תת קטע סגור והאינטגרל הלא אמיתי שלה קיים ומתכנס ושווה לגבול סדרה האינטגרלים הלא אמיתיים. הוכחה: נשים לב כי לכול תת קטע סגור ניתן להפעיל המשפט הקודם, ולכן פונקציית הגבול אינטגרבילית בכול תת קטע סגור והאינטגרל מתכנס בהחלט מהשוואה לפונקציית המז'ורנטה. עכשיו נסתכל על ההפרש בין האינטגרל של הפונקציה הגבולית לסדרת האינטגרלים. אנחנו יכולים לבחור נקודה שהחל ממנה האינטגרל של המז'ורנטה אפסי מקריטריון קושי, ומכך גם האינטגרל של הפונקציה הגבולית, כמו כן מבמ"ש עד לנקודה הזו (זה קטע סגור) הפונקציות קרובות כרצוני ולכן הפרש האינטגרלים מתפצל להפרש עד לנקודה ולהפרש החל ממנה, ומא"ש משולש ההפרש אפסי, ולכן סדרת האינטגרלים שואפת לאינטגרל של הפונקציה הגבולית.
- גבול ונגזרת: עבור סדרת פונקציות $f_n: [a, b] \rightarrow R$ גזירות ברצפיות כך שקיימת פונקציה g ש $f'_n \rightarrow (u)g$ כלומר סדרת הנגזרות שואפת במ"ש, וכמו כן הסדרה f_n מתכנסת נקודתית באיזשהי נקודה, אז f_n מתכנסת במ"ש לפונקציה שהנגזרת שלה היא הגבול של סדרת הנגזרות בקטע הסגור! כלומר $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'$.

טורי פונקציות:

- כשנרשום $\sum u_n(x) = f(x)$ בעצם נתכוון שסדרת הסכומים החלקיים מתכנסת במ"ש לפונקציה הזו. משום שבסה"כ מדובר בסדרות סכומים חלקיים אז כול מה שהוכחנו עד עכשיו תקף גם כאן.
- דיני לטורים חיוביים: עבור טור של פונקציות רציפות ואי שליליות שידוע שמתכנס נקודתית לפונקציה רציפה, אז ההתכנסות במ"ש כי סדרת הסכומים החלקים מונוטונית מחיוביות המחברים.
- אינטגרציה איבר איבר: עבור $\sum u_n(x)$ כאשר $u_n(x)$ רציפות והטור מתכנס במ"ש אז הפונקציה הגבולית רציפה וניתן לאנטגרל איבר איבר $\int_a^b (\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N u_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i$ נובע מיידית מהחלפת גבול ואינטגרל.

- גזירה איבר איבר: עבור $\sum u_n(x)$ שמתכנס נקודתית בנקודה כלשהי וטור הנגזרות מתכנס במ"ש, אז גם הטור המקורי מתכנס במ"ש וניתן להחליף גבול ונגזרת כלומר $(\sum u_n)' = \sum u_n'$. נשים לב שהמשפט נותן התכנסות במ"ש של הטור המקורי בקטע סגור!!!
- הבוחן של ווירשטראס: עבור $\sum u_n(x)$ כך שקיימים M_j מספרים כך ש $|u_j(x)| < M_j$ לכול איקס וגם הטור $\sum M_j$ מתכנס אז הטור $\sum u_n(x)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש. נובע מיידית מקריטריון קושי על הטור של הפונקציות בערך מוחלט, והעובדה שהזנב של הטור הזה קטן מהזנב של הטור מתכנס.
- משפט אבל: עבור $a_k(x), b_k(x): [a, b] \rightarrow R$ שתי סדרות פונקציות כך ש $\sum b_n(x)$ מתכנס במ"ש ו $a_k(x)$ מונוטונית בח לכול איקס נתון וחסומה במידה אחידה אז $\sum a_n(x)b_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[a, b]$
- משפט דירכלה: עבור $a_k(x), b_k(x): [a, b] \rightarrow R$ שתי סדרות פונקציות כך ש $\sum b_n(x) = S_n(x)$ חסומה במידה אחידה כסדרת פונקציות ו $a_k(x)$ מונוטונית באן לכול איקס, ומתכנסת במש לאפס אז $\sum a_k(x)b_k(x)$ מתכנס במ"ש.
- פונקציה רציפה שאינה גזירה: בונים פונקציית מסור וממנה מייצרים סדרת פונקציות מסור עם אמפליטודה הולכת וקטנה, סוכמים את הפונקציות והטור מתכנס במ"ש מה M בוחן, לפונקציה רציפה, לאחר מכן מראים בידיים כי לכול נקודה לא קיימת הנגזרת כי הפונקציה לינארית למקוטעים ולכן ניתן לבנות סדרה שהנגזרת תהפוך מאחד למינוס אחד ולא תתכנס.
- צפיפות הפולינומים ברציפות: כלומר כול פונקציה רציפה על קטע סגור ניתן לקרב במ"ש על ידי סדרה של פולינומים. נתמקד בפונקציות על הקטע הסגור $[0, 1]$ ונקרב אותן על ידי הפולינום שמייצג התפלגות בינומית. הפונקציה רציפה על הקטע הסגור ולכן רציפה במ"ש ולכן נפרק את הסכום של הבינום לאזור בו הנקודות קרובות מספיק ובו הן רחוקות...

טורי חזקות:

- טור חזקות סביב אפס הוא $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. סביב נקודה x_0 כלשהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. נשים לב שטור כזה תמיד מתכנס בנקודה אחת, האפס, אבל אפשר לייצר טור שלא יתכנס בשום נקודה אחרת, או שיתכנס בכול הישר.
- רדיוס התכנסות: אם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס בנקודה x_0 אז הוא מתכנס בהחלט ובמ"ש בכול נקודה $|x| < |x_0|$, נובע מה M בוחן של ווירשטראס. ובפרט בכול קטע סגור שמוכל ממש בקטע $[-|x_0|, |x_0|]$ יש התכנסות במ"ש ולכן הטור רציף, כגבול במש של רציפות. לכן קיים מספר ממשי $R \in [0, \infty]$ (כולל) שלכול נקודה שרחוקה מהראשית פחות ממש מ R הטור מתכנס במש ובהחלט, לכול נקודה שרחוקה הוא מתבדר, ובקצוות צריך לבדוק ידנית.
- קושי הדמרד: רדיוס ההתכנסות נתון על ידי $\frac{1}{R} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$. נובע מהוכחה ישירה שלכול נקודה שקטנה מזה יש התכנסות, ולנקודה שגדולה יש התבדרות, מהשוואה לטור גאיומטרי שהמקדם שלו הוא המקדם הכפלי בין הערך המוחלט של הנקודה לרדיוס שנתון מהנוסחה. לכן אם הנקודה רחוקה מהרדיוס המקדם יהיה גדול מאחד והטור הגיאומטרי יתבדר, אם היא קרובה מהרדיוס אז המקדם יהיה קטן מאחד והטור הגיאומטרי יתכנס, ואז משתמשים ב M בוחן.
- גזירות של טור חזקות: כול טור חזקות מגדיר טור נגזרות שגם הוא טור חזקות. רדיוס ההתכנסות שלהם זהים, נובע מיידית מקושי הדמרד וחשבון גבולות. נשים לב שבכול נקודה בתוך רדיוס ההתכנסות (לא כולל הקצוות) אז טור הנגזרות מתכנס לנגזר של הטור נובע מכך ששניהם מקיימים את תנאי משפט החלפת נגזרת וגבול בכול תת קטע סגור בתוך הקטע הפתוח של רדיוס ההתכנסות.
- קשר בין טורי טיילור לטורי חזקות: נשים לב כי אם טור חזקות מתכנס לפונקציה אז בכול תת קטע סגור של רדיוס ההתכנסות הפונקציה הזו גזירה ברציפות אינסוף פעמים, והטור חזקות הזה הוא בדיוק טור טיילור שלה, נובע מהעובדה שהנגזרת הא שלה זה הגבול במש של טור

הנגזרות הא, ואז מציבים אפס. לכן יש פונקציות שלעולם לא נוכל להציג כטור חזקות, אפילו אם הם גזירות אינסוף פעמים.

• קצה רדיוס ההתכנסות:

- אם טור חזקות מתכנס במ"ש בקטע $[0, R)$ אז הוא מתכנס גם ב R (כטור של מספרים). מבמ"ש נובע קריטריון קושי, ומרציפות הפולינום הסופי אפשר למשוך את קיום קושי גם לקצה ולקבל שהטור מתכנס בקצה כטור מספרי.
- אם טור חזקות מתכנס בקצה רדיוס ההתכנסות R אז הטור מתכנס במ"ש בקטע $[0, R]$. נובע מקריטריון אבל לטורי מכפלה כי $\sum a_k x^k = \sum a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k$ מהנתון ידוע כי $\sum a_k R^k$ טור מתכנס, ובלי תלות באיקס ולכן במש. כמו כן $\left(\frac{x}{R}\right)^k$ סדרה מונו יורדת וחסומה במידה אחידה. ולכן המכפלה מתכנסת במש בקטע הסגור כנדרש.
- אם הטור לא מתכנס בקצה, אז הוא לא מתכנס במ"ש בקטע הפתוח.
- תחום ההתכנסות לא גדל כשגוזרים, כלומר אם טור הנגזרות מתכנס בקצה אז גם הטור המקורי מתכנס, וזה נובע מהעובדה שאם טור הנגזרות מתכנס בקצה אז הוא רציף ומתכנס במ"ש בכל הקטע הסגור, אז ניתן לעשות אינטגרציה איבר איבר ולקבל את הטור המקורי, אבל זה אינטגרל אמיתי ולכן סופי.
- מכול האמור לעיל נובע שאם הטור $\sum a_k$ מתכנס אז $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum a_k r^k = \sum a_k$ מרציפות והתכנסות במ"ש.

• סוגי סכימות:

- נאמר שהטור $\sum a_k$ מתכנס לפי אבל אם קיים הגבול $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum a_k r^k$ ובפרט נדרוש רדיוס התכנסות 1. ראינו שאם הטור מתכנס אז הוא גם מתכנס לפי אבל, אבל יש טורים שהם כן לפי אבל אבל לא סכימים רגיל.
- נאמר שסדרה c_n מתכנסת לפי צזארו אם קיים הגבול $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N c_n$ כלומר גבול הממוצעים. נאמר שטור מתכנס אם סדרת הסכומים החלקים מתכנסת לפי צזארו ובפרט קיים הגבול $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i c_n$. כול טור שמתכנס, מתכנס לפי צזארו, אבל יש טורים שהם צזארו אבל לא מתכנסים רגיל.
- קיימים טורים שמתכנסים לפי אבל, אבל לא לפי צזארו. אבל כול טור שמתכנס צזארו מתכנס גם אבל.

• כפל של טורים:

- אם שני טורים מתכנסים בהחלט אז טור המכפלה שלהם גם כן מתכנס בהחלט בלי חשיבות לסדר הסכימה, ולכן אפשר לבחור את סדר הסכימה לפי ריבועים ולקבל ש $\sum a_k b_k = (\sum a_k)(\sum b_k)$.
- מכפלת קושי: נשים לב שעבור טורי חזקות תמיד בתוך הרדיוס יש התכנסות בהחלט ולכן יש משמעות לכפל של טורים. מכפלת קושי לוקחת שני טורי חזקות ונותנת את טור הכפל שלהם גם כטור חזקות: $(\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k) = \sum c_k x^k$ כאשר מתקיים $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$. ולכן בתוך רדיוס ההתכנסות אם $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש ל $f(x)$ ו $\sum b_k x^k$ מתכנס במ"ש ל $g(x)$ אז $\sum c_k x^k$ מתכנס במ"ש ל $g(x)f(x)$.

מרכיבים וטורי פוריה:

- נאמר שסדרה/טור של מספרים מרכיבים מתכנסת אמ"מ החלק הממשי והמדומה מתכנסים כול אחד בנפרד. וזה שקול ללדרוש שאיפה לאפס של המרחק מהגבול, מאי שוויון המשולש. טור מרכיב מתכנס בהחלט אמ"מ הטור הממשי והטור המדומה מתכנסים בהחלט.

- התכנסות בדיסק: עבור טור חזקות מרוכב המתכנס בנקודה מסוימת אז הוא מתכנס בכל נקודה עם ערך מוחלט קטן מהנקודה הזו, והרדיוס נתון על ידי קושי הדמרד.
- אקספוננט מרוכב: $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ זו הגדרה, והטור חזקות הנ"ל מתכנס בהחלט ובמש בכל המישור, מהתכנסות טור טיילור הממשי של הפונקציה. נשים לב שמתקיים $e^z * e^w = e^{z+w}$ וזה נובע מכפל של טורים מתכנסים בהחלט ונוסחאת הבינום.
- זהות אוילר: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. נובע מיידית מהגדרת אקספוננט מרוכב וטורי טיילור של סינוס וקוסינוס, והתכנסות במש בכל המישור.
- הצגה פולארית: כול מספר מרוכב ניתן להציג כ $Re^{i\theta}$ ולכן $|z|^k = R^k = |z^k|$ משום ש $|e^{i\theta}| = 1$ ומזה ניתן לפתח הרבה נוסחאות טריגונומטריות.
- התכנסות בהחלט של טור חזקות מרוכב: נשים לב $\sum c_k z^k$ זה למעשה $\sum c_k R^k e^{ik\theta}$ ולכן אם נסתכל על התכנסות בהחלט זה למעשה לחקור את הטור הממשי $\sum |c_k| R^k$
- פונקציות $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$: הן למעשה זוג פונקציות ממשיות, כלומר מסתכלים על כול קואורדינטה בנפרד. ולכן אינטגרבילת / גזירה / רציפה וכו' אמ"מ מקיימת זאת בכל קואורדינטה בנפרד. ומתקיים שהאנטגרל / גזרת זה בדיוק סכום האינטגרלים/נגזרות על הפונקציות הממשיות.
- $\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ כאשר f פונקציה מרוכבת אינטגרבילית. מאינט' f נובע מיידית שגם הנורמה של f אינטגרבילית, מחשבון אינטגרביליות והעובדה שהגדרנו אינט' מרוכבת כאינט' בכול רכיב בנפרד. האינטגרל של f על הקטע הוא מספר מרוכב כלשהו z ולכן $\frac{\bar{z}}{|z|}$ מקיים ש $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = |z| = \lambda z = \lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f = Re(\int_a^b \lambda f) = \int_a^b Re(\lambda f)$ ולכן $\lambda z = |z|$ ואז ניתן להשתמש במונוטוניות על ממשיים. נשים לב שהכפלה בלמדה זה פשוט סיבוב של המספר המרוכב עד שהוא הופך לממשי.
- פונקציות מחזוריות: נסתכל על הישר הממשי מודולו שני פאי, כלומר נסתכל על פונקציות מחזוריות שני פאי על $\mathbb{R}$. בפרט $f(0) = f(2\pi)$, ונדרוש גם אינטגרביליות.
 - פולינום טריגונומטרי: $e_n(t) = e^{int}$ פונקציה שני פאי מחזורית. פולינום טריגו הוא צירוף לינארי סופי של כאלה, שזה למעשה צירוף לינארי סופי של קוסינוסים וסינוסים עם מקדמים שונים בחוץ ובתוך הפונקציה. $p(t) = \sum_{-N}^N c_n e_n(t)$
- מרחב וקטורי: כול הפונקציות השני פאי מחזוריות ואינטגרביליות מגדירות מרחב וקטור שהוא גם מרחב מכפלה פנימית. $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$ נשים לב שכול תכונות מכפלה פנימית מתקיימות מלבד העובדה שאם הנורמה היא אפס אז הפונקציה היא פונקציה האפס, זה לא נכון מהאדישות של אינטגרל לשינוי סופי של נקודות. אם היינו דורשים גם רציפות זה היה נכון.
 - משפט פיתגורס: אם $f \perp g$ אז $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ מידי מהגדרה.
 - קושי שוורץ: $\|f\| \|g\| \geq |\langle f, g \rangle|$, נשים לב שא"ש המשולש נובע מיידית מקושי שוורץ.
 - הקבוצה e_n : זוהי קבוצה אורתונורמלית. נובע מיידית מהגדרת המכפלה הפנימית. ברור גם כי היא פורשת את מרחב הפולינומים הטריגו (משום שהגדרנו פולינומים טריגו להיות צ"ל של הפונקציות הללו) כלומר $f = \sum c_n e_n(x)$ (כאשר הסכום סופי כמובן) הינו פולינום טריגו ומתקיים שההטלות על הקבוצה האורתונורמלית הן $\langle f, e_k \rangle = c_k$ מידי מהגדרת מכפלה פנימית ונסמן $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$ וזה יקרא מקדם פוריה ה n של הפונקציה f . (שעבור פולינום טריגו זה בדיוק המקדם של הפונקציה בצירוף הלינארי). אם נתונים שני פולינומים טריגו $f = \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e_n$ וגם $g = \sum_{-N}^N \hat{g}(n) e_n$ אז מתקיים $\langle f, g \rangle = \sum_{-N}^N \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$ מידי מאורתוגונליות.
- $S_N f(x)$ לכול פונקציה ניתן לחשב מקדמי פוריה ואז נסמן $S_N f(x) = \sum_{-N}^N \hat{f}(n) e_n(x)$. אנחנו נרצה שהסכום הזה יתכנס לפונקציה המקורית.
- מקדמי פוריה: אם הפונקציה ממשיית אז מקדם פוריה של n - צמוד למקדם פוריה ה n ולכן הסכום יהיה ממשי. אם הפונקציה מדומה אז יש הצמדה אבל בסימן מינוס ולכן הסכום יהיה

מדומה. אם הפונקציה ממשית וזוגית/אי זוגית אז המקדמים כולם ממשיים מהחלפת משתנה באינטגרל.

- הזנב מאונך לקירוב: לכול N סופי אם נקרב את f בעזרת $S_N f$ אז לכול $k \leq N$ מתקיים שהזנב, כלומר $f - S_N f$ מאונך לכול e_k נובע מיידית ממפכלה פנימית $\hat{f}(k) - \hat{f}(k) = 0$ כי $\langle f - S_N f, e_k \rangle = \hat{f}(k) - \hat{f}(k)$ ובפרט מתקיים $\langle f - S_N f, f - S_N f \rangle = 0$ הוא פשוט סכום סופי של כאלה. ולכן ממשפט פיתגורס $\|f\|^2 = \|S_N f\|^2 + \|f - S_N f\|^2$.

- אי שוויון בסל: $\|f\|^2 \geq \|S_N f\|^2$ ולכן הא"ש נשמר בגבול ולכן נקבל $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty$ כלומר טור מקדמי פוריה בריבוע מתכנס. נשים לב ש $\|S_N f\|^2$ זה המפכלה הפנימית שלו עם עצמו, ולכן מאורתונורמליות פשוט נקבל את המקדמים בריבוע בסכום.

- הלמה של רימאן לבג: $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \hat{f}(n) = 0$ נובע מיידית מהיות המקדמים איברים בטור מתכנס.

- התכנסות L_2 : $f \in R[0, 2\pi]$ ו $f_n \in R([0, 2\pi])$ נאמר שהסדרה מתכנסת לפונקציה בנורמה L_2 אם מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. גבול זה אינו יחיד.

- התכנסות במ"ש גוררת התכנסות L_2 . נובע מיידית מהחלפת גבול ואנטגרל שזה מותר כי יש התכנסות במ"ש של פונקצית ההפרש ביניהם בריבוע לאפס.

- הפולינומים צפופים במובן L_2 ברציפות. נובע מיידית מכך שהם צפופים במש...

- לכול מעלה N מתקיים שמכול הפולינומים הטריגו ממעלה N , $S_N f$ הוא הקירוב הטוב ביותר ל f . $\| \sum c_k e_k + S_N f - S_N f - f \| = \| \sum c_k e_k - f \|$ מתקיים שהזנב $S_N f - f$ מאונך לפולינום הטריגו באגף שמאל ולכן ממשפט פיתגורס $\| \sum c_k e_k - f \|^2 = \| \sum c_k e_k + S_N f - S_N f - f \|^2 \geq \| S_N f - f \|^2$ ולכן טור פוריה הוא הקירוב הטוב ביותר מבין כול הפולינומים הטריגונומטרים.

- לכול פונקציה אינטגרלית ומחזורית שני פאי יש סדרת רציפות ששואפת אליה ב L_2 . הפונקציה אינטגרלית ולכן יש חלוקה שבה התנודה קטנה מאפסילון. נגדיר פונקציה רציפה להזדהות עם הפונקציה הזו בכול נקודות התפר בין הקטעים, ובקטע עצמו להיות לינארית. מובטח שההפרש בין הפונקציה המקורית לפונקציה הזו קטן מהתנודה בכול תת קטע, כמו כן פונקציית ההפרש חסומה על ידי פעמיים החסם של הפונקציה. ולכן אינטגרל פונקציית ההפרש קטן מאפסילון לכול אפסילון. ולכן ניתן לקרב פונקציה אינטגרלית במובן L_2 על ידי רציפות, שאותן ניתן לקרב במ"ש על ידי פולינום טריגו, ולכן ניתן לקרב פונקציה אינטגרלית במובן L_2 על ידי פולינום טריגו, ולכן טור פוריה שואף במובן L_2 לפונקציה, כי הוא הפולינום הטריגו הקרוב ביותר.

- שוויון פרסבל: $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \lim \|S_N f\|^2 = \lim \|f\|^2 - \lim \|f - S_N f\|^2$ כול זה נובע ממשפט פיתגורס, ולכן משום שהוכחנו שהטור פוריה שואף ב L_2 לפונקציה אז

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2$$

- משפט פייר: מבטיח שרציפה ניתן לקרב במ"ש על ידי פולינום טריגונומטרי.

• התכנסות נקודתית:

- אם f גזירה ברציפות אז $\hat{f}'(n) = in \hat{f}(n)$ נובע מיידית מאינטגרציה בחלקים. ולכן עבור פונקציה גזירה ברציפות המקדמים דועכים לאפס מהר לפחות כמו לינארי כי גם מקדמי פוריה של הנגזרת מקיימים את רימאן לבג.

- עבור פונקציה גזירה ברציפות טור מקדמי פוריה שלה מתכנס, נובע מאי שוויון הממומצעים והעובדה שטור המקדמים של הנגזרת בריבוע מתכנס מבסל, והקשר בין מקדמי הנגזרת למקדמי הפונקציה. לכן מה M בוחן נובע ש $S_N f(x)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש ובכלל שהפונקציה רציפה אז הוא מתכנס במ"ש אליה, כי יש גם התכנסות L_2 (לכול פונקציה זה נכון) אבל מרציפות ההתכנסות L_2 חייבת להתלכד עם ההתכנסות

במ"ש, משום שהנורמה של פונקציית ההפרש יוצאת אפס, אבל היא רציפה ולכן זהותית אפס.

○ למעשה כדי שטור פוריה יתכנס במ"ש לפונקציה היא צריכה להיות רציפה ושטור מקדמי פוריה שלה יתכנס. אם היא גזירה ברציפות אז נובע מיידית שהטור מתכנס, אבל זה לא תנאי הכרחי.

○ ליפשיץ מקומי: אם f מקיימת ליפשיץ מקומי ב x_0 אז מתקיים $S_N f(x_0) \rightarrow f(x_0)$ כלומר התכנסות נקודתית של קירוב פוריה. כאשר ליפשיץ מקומי זה

$$\exists \delta, M > 0: x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$$

• קונבולוציה: עבור שתי פונקציות $f, g \in R[0, 2\pi]$ נגדיר $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$

○ נשים לב כי $(f * e_k)(x) = e^{ikx} \hat{f}(k)$ כלומר האיבר ה k בסכום פוריה הוא פשוט קונבולוציה של הפונקציה עם הבסיס האורתונורמלי.

○ $f * g = g * f$ נובע מהחלפת משתנה באינטגרל והזזת התחום ממחזוריות

○ $f * (g + h) = f * g + f * h$ מלינאריות האינטגרל

○ $f * (g * h) = (f * g) * h$ אין לנו הכלים להוכיח.

○ $(\widehat{f * g})(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ ההוכחה חסרה...

○ קונבולוציה תמיד רציפה, כפונקציה. נובע מכך שנקרב כול אחת מהפונקציות בקונבולוציה על ידי סדרה של פונקציות רציפות, קירוב L_2 ואז בכול שלב בקרוב נעשה קונבולוציה.

קונבולוציה של רציפות היא רציפה, ונראה שסדרת הקונבולוציות שואפת במ"ש לקונבולוציה ולכן הקונבולוציה רציפה.

• גרעין דירכלה: $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e_n(x)$

○ ראינו כי $S_N f = f * D_N$ וכמו כן מתקיים שמקדמי פוריה של D_N הם אחד לכול מקדם שקטן מהמעלה, ואפס אחרת, מידי ממכפלה פנימית.

○ $|D_N(x)| \leq 2N + 1$ מא"ש המשולש. ובאפס הערך אכן מתקבל.

○ לכול נקודה שאינה אפס $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ ובפרט ממשית וזוגית, אבל לא תמיד

חיובית (וזו רע לנו). מוכיחים עם סכום סדרה הנדסית ואלגברה. בפרט מתקיים

$$|D_N(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{\pi}{|x|}$$

○ זה גרעין, כלומר האינטגרל המנורמל שלו הוא אחד. כי האינטגרל המנורמל זה פשוט מקדם הפוריה האפס שלו, שהוא אחד.

• גרעין פייר: $\sigma_N f(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \hat{f}(k) e_k = \sigma_N f(x)$ כלומר זו סדרת הממוצעים

של טור פוריה. נגדיר את גרעין פייר $F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x)$ כלומר הממוצעים של גרעין דירכלה.

○ $f * F_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n * f = \sigma_N f(x)$ מידי מלינאריות הקונבולוציה, ותכונות גרעין דירכלה.

○ $F_N(y) = \left(\frac{\sin((\frac{N+1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} \right)^2$ לכול נקודה שונה מאפס, ובפרט הגרעין תמיד חיובי. הנוסחא

נובעת מאלגברה על הנוסחא לגרעין דירכלה. כמו כן האינטגרל על הגרעין בקטע מינוס פאי פאי הוא אחד, כממוצע של אינטגרלים שערכם 1, ובפרט גם האינטגרל עליו בערך מוחלט, כי הוא חיובי תמיד.

○ המסה של גרעין פייר מתרכזת סביב אפס, כלומר לכול אפסילון ולכול סביבה דלתא של אפס, אם נתרחק מספיק רחוק בסדרה, אז האינטגרל של כול מה שמחוץ לסביבה הזו קטן

מאפסילון. נובע מחסימת הערך של הגרעין בעזרת הנוסחא שלעיל, לקטע שחסום מלמטה על ידי דלתא.

- **משפט פייר:** עבור פונקציה רציפה מתקיים $\sigma_N f \rightarrow (U)f$ כלומר סדרת הממוצעים מתכנסת במ"ש לפונקציה אם היא רציפה. ובפרט הפולינומים בטריגו צפופים במ"ש ברציפות. נובע מכך שפונקציה רציפה בקטע סגור חסומה ורציפה במש, אז יש סביבה של אפס שבה ערכי הפונקציה קרובים עד כדי אפסילון חצי, מרציפות במ"ש. מהטענה שנאמרה לעיל האינטגרל בכול השאר קטן מאפסילון חצי החל ממקום מסוים, מתכונות גרעין פייר, ומחסימות הפונקציה נקבל שההפרש בין סכומי צארו לפונקציה קטן מאפסילון במ"ש.
- עבור פונקציות רציפות מקדמי פורייה שלהן מגדירים אותן באופן חח"ע! כי עבור שתי פונקציות עם אותם מקדמים יהיה להן את אותם סכומי פייר שיתכנסו אליהן במ"ש, ולכן הן שוות.

טופולוגיה ופונקציות מרובות משתנים:

- נורמה נגדיר כשורש המכפלה הפנימית של וקטור בעצמו, ומרחק נגדיר כנורמה של ההפרש.
- $x, y \in \mathbb{R}^n$ אז לכל $j \in \{1, \dots, n\}$ מתקיים $|x_j - y_j| \leq \|x - y\| \leq \sum |x_i - y_i| \leq \sqrt{n} \|x - y\|$
- כלומר המרחק בכול קואורדינטה קטן מהמרחק כולו שקטן מסכום המרחקים בכול קואורדינטה שקטן משורש אן כפול המרחק. כאשר כול האי שוויונים ברורים מלבד האחרון שנובע מקושי שורץ של וקטור ההפרש עם וקטור של אחדים ומינוס אחדים.
- נאמר ש $x_m \rightarrow y$ כאשר $x_m, y \in \mathbb{R}^n$ אם נורמת ההפרש שואפת לאפס כמספר ממשי, וזה אמ"מ סדרת הנקודות בכול קואורדינטה שואפת בנפרד לקואורדינטה של וקטור הגבול. וזה מהא"ש שלעיל והעובדה שהמימד סופי.
- **כדור:** עבור $x_0 \in \mathbb{R}^n$ נגדיר הכדור ברדיוס r סביבו להיות $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$ אם האי שוויון חזק נאמר שהכדור פתוח, אחרת נאמר שהוא סגור.
- **ספירה:** $S(x_0, r) = \bar{B}(x_0, r) \setminus B(x_0, r)$ כלומר הכדור הסגור פחות הכדור הפתוח, כלומר רק המעטפת.
- **פתיחות / נקודות פנימיות / קבוצה פתוחה:** $A \subseteq \mathbb{R}^n$, אז נקודה פנימית של A אם קיים רדיוס כך שהכדור הפתוח סביב x_0 מהרדיוס הזה מוכל כולו ב A . הפנים של A : $int(A)$ הינו אוסף כול הנקודות הפנימיות. באופן טריוויאלי $int(A) \subseteq A$, כי נקודה שאינה בקבוצה לעולם לא יכולה שיהיה כדור סביבה שיהיה מוכל כולו בקבוצה. קבוצה תקרא פתוחה אם היא שווה לפנים שלה. נשים לב שהפנים היא קבוצה פתוחה כלומר $int(int(A)) = int(A)$.
 - איחוד אינסופי (אפילו לא בן מנייה) של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה, וחיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח.
 - הפנים של קבוצה זה איחוד כול הקבוצות הפתוחות שמוכלות בה.
 - $int(A) = (\bar{A}^c)^c$
- **סגירות / נקודות סגור / קבוצה סגורה:** קבוצה תקרא סגורה אם המשלים שלה פתוח. נקודת סגור של קבוצה הינה נקודה שבכול כדור מסביבה יש נקודה בקבוצה, או באופן שקול יש סדרה של נקודות בקבוצה ששואפות אליה, באופן ריק כול נקודה בקבוצה הינה נקודת סגור. הסגור של קבוצה מוגדר להיות קבוצת כול נקודות הסגור ויסומן $\bar{A}$. קבוצה סגורה אמ"מ היא שווה לסגור שלה, נובע מיידית מהגדרות. כמו כן קבוצה סגורה אמ"מ לכל סדרה של נקודות בקבוצה, הגבול של הסדרה נמצא בקבוצה.
 - חיתוך כלשהו אפילו אינסופי לא בן מנייה של סגורות הוא סגורה, נובע מאיחוד אינסופי של פתוחות הוא פתוחה ושימוש בדה מורגן.

- **פתיחות + סגירות:** נשים לב שהקבוצות היחידות שהן גם סגורות וגם פתוחות הן הקבוצה הריקה וכול המרחב. נובע מהנחה בשלילה ולקיחת נקודה בקבוצה ונקודה במשלים והעברה קו ביניהם ואז הסתכלות על הנקודה הראשונה שעוברת מהקבוצה למשלים.
- **שפה:** $\partial A = \overline{A} \cap \overline{R^n \setminus A}$ כלומר נקודות שהן בסגור של שתי הקבוצות, כלומר ניתן להתקרב אליהן משתי הקבוצות כמה שנרצה.

קמירות/קשירות:

- קטע בין שתי נקודות $x, y \in R^n$ הינו $[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ קבוצה תקרא קמורה הם הקטע בין כול שתי נקודות בה, מוכל בקבוצה. נשים לב שחיתוך של קמורות הוא קבוצה קמורה.
- קמור: הקבוצה הקמורה הקטנה ביותר שמכילה את הקבוצה, כלומר החיתוך של הקבוצות הקמורות שמכילות את הקבוצה.
- קו פוליגונילי בין שתי נקודות הוא איחוד סופי של קטעים כך שהראשון מתחיל בנקודה הראשונה והאחרון מסתיים בנקודה השנייה. $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i]$
- קבוצה קשירה פוליגונית אם בין כול שתי נקודות קיים קו פוליגונילי שמוכל בקבוצה שמחבר אותן.

סדרות:

- נקודות הצטברות: עבור קבוצה $A \subseteq R^n$ נאמר ש x_0 נקודת הצטברות אם היא נקודת סגור לא טריוויאלית, כלומר עבור כול כדור מסביב לנקודה יש נקודה ששיכת לקבוצה, והנקודה הזו היא לא x_0 בעצמה. נקודה מבודדת היא נקודה בקבוצה שאינה נקודת הצטברות, או במילים אחרות יש כדור סביב הנקודה שבו הנקודה היחידה ששיכת לקבוצה היא הנקודה עצמה.
- נשים לב שגם במרחבים ממימד גבוה יש יחידות הגבול, והעובדה שסדרה מתכנסת אמ"מ היא קושי. כמו כן סדרת וקטורים היא קושי אמ"מ הקוארדינטות שלה קושי.

קומפקטיות:

- קבוצה תקרא חסומה אם קיים כדור סביב הראשית שמכיל אותה. נשים לב שסדרה חסומה של וקטורים, יש לה תת"ס מתכנסת. נובע מביצוע זאת קוארדונטיה קוארדינטה וכול פעם הצטמצמות לתת"ס.
- קבוצה תקרא קומפקטית אם היא סגור וחסומה. או באופן שקול אמ"מ לכול סדרה של נקודות בקבוצה יש תת"ס מתכנסת לאיבר בקבוצה.
- קבוצה קומפקטית אמ"מ לכול כיסוי פתוח שלה יש תת כיסוי סופי. נשתמש בטענה הבאה שאומרת שעבור קבוצה יורדת (בהכלה) ואינסופית של קבוצות קומפקטיות אז החיתוך שלהן לא ריק, כי נבנה שסדרה של נקודות כך שכול נקודה שייכת לקבוצה הבאה בתור, אז ברור שהסדרה הזו חסומה, כי הקבוצה הראשונה חוסמת את כול שאר הקבוצות והיא חסומה בעצמה, ולכן לסדרה יש תת"ס מתכנסת, מסגירות הגבול שייך לכול אחת מהקבוצות, ולכן הגבול בחיתוך. בעזרת הטענה הזו נסתכל על קבוצה קומפקטית A ונניח שיש לה כיסוי פתוח שאין לו תת כיסוי סופי, ואז נתחיל לחלק אותה לקוביות עם קטרים הולכים וקטנים, שגם לכול אחת מהן אין כיסוי סופי, כול קוביה נחלק לעוד קוביות, ומהטענה בחיתוך בסוף יש נקודה, היא שייכת לאחת מהקבוצות בכיסוי, הכיסוי פתוח ולכן יש סביבה, סתירה לעובדה שלקבוצה שהקוטר שלה קטן מרדיוס הסביבה אין כיסוי סופי. הכיוון השני קל בשלילה.

גבולות/פונקציות/רציפות:

- גבול של פונקציה נאמר ש $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ אם לכול סדרה של וקטורים x_k כך שהיא שואפת לוקטור x_0 ושונה ממנו מתקיים $f(x_k) \rightarrow L$. בצורה יותר כללית אם הפונקציה היא רק על קבוצה A אז נגדיר הגבול בנקודות הצטברות כמו לעיל אבל לסדרות המוכלות בקבוצה.
- גבולות חוזרים: נשים לב שקיום הגבולות החוזרים אינו תנאי הכרחי לקיום הגבול, כלומר יתכן שהגבול קיים ואחד הגבולות החוזרים לא. כמו כן יתכן שהגבולות החוזרים קיימים

- ושווים אבל הגבול לא קיים. אבל אם הגבולות החזורים קיימים ושונים אין גבול. נשים לב
אבל שאם קיים הגבול בנקודה מסוימת, אז על כול מסילה שמתקרבת לנקודה חייב להיות
קיים הגבול. כדי להפריך קיום הגבול נראה שעבור מסילות שונות יש גבולות שונים, או
שנעבור לקוארדינטות פולריות ונראה תלות בזווית. כמו כן אם נעבור לפולאריות ונראה שיש
שאיפה במ"ש לאפס כשהרדיוס שואף לאפס בלי תלות בזווית אז יש גבול.
- נאמר שפונקציה $f: A \rightarrow R^m$ רציפה ב $x_0 \in A$ אם x_0 מבודדת, או שהיא נקודת הצטברות
והגבול בנקודה שווה לערך הפונקציה בנקודה.
 - פונקציה רציפה סדרתית ב x_0 אמ"מ לכל אפסילון קיים רדיוס דלתא, כך שכול הנקודות
שנמצאות בכדור דלתא סביב x_0 וגם בקבוצה A אז הערך של הפונקציה עליהן נמצא בכדור
אפסילון סביב $f(x_0)$
 - $f: R^n \rightarrow R^m$ רציפה אמ"מ היא רציפה בכול קוארדינטה בתחום! כלומר $f = (f_1, \dots, f_n)$
אז f רציפה אמ"מ f_i רציפה לכול i .
 - נשים לב שסכום של רציפות, מכפלה (פנימית) של רציפות וגם הרכבה של צריפות זה
רציף.
 - רציפות במ"ש: פונקציה רציפה במ"ש בקבוצה A אם לכל אפסילון קיים דלתא כך שכול
שתי נקודות שקרובות עד כדי דלתא ערכי הפונקציה עליהן קרובים עד כדי אפסילון.
 - משפט קנטור: פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית רציפה בה במ"ש. ההוכחה בהנחה
בשליה שיש שתי סדרות של נקודות שמתקרבות עד כדי דלתא לכול דלתא אבל ערכיהם
רחוקים יותר מאפסילון מסוים, אבל הקבוצה קומפקטית לכן יש תת"ס מתכנסת לשתי
הסדרות לאותו הגבול, ואז מרציפות נקבל שוויון גם בערכים, סתירה.
 - משפט וירשטראס: $f: A \rightarrow R$ רציפה כאשר A קומפקטית, אז f חסומה ומשיגה את חסמיה.
הוכחה מיידית מהעובדה שסדרות של קבוצה קומפקטית מכילות תת"ס מתכנסת לאיבר
בקבוצה.
 - מסילה: תמונה של העתקה רציפה $\Gamma: [a, b] \rightarrow R^n$. אם ערכי הפונקציה בקצוות שווים
נאמר שהיא סגורה, ואם היא חח"ע נאמר שהיא פשוטה.
 - תכונת ערך הביניים: $A \subset R^n$ קשירה פוליגונית ופונקציה $f: A \rightarrow R$ רציפה ונניח $x, y \in A$
כך ש $f(x) < c < f(y)$ אז קיימת נקודה $z \in A$ כך ש $f(z) = c$. יש קו פוליגוני בין x ל
 y נבנה מסילה מהקטע $[0,1]$ לקו הפוליגוני. המסילה רציפה. נרכיב עליה את הפונקציה,
ונקבל פונקציה רציפה מהקטע $[0,1]$ ל R ולכן היא מקיימת את ערך הביניים, ולכן יש נקודה
בין $[0,1]$ כך ש $f(\Gamma(t)) = c$ ולכן משום ש $\Gamma(t) \in A$ קיבלנו המבוקש.
 - קשירות מסילתית: קבוצה תהיה קשירה מסילתית אם לכול שתי נקודות בה יש עקומה
רציפה שמחברת אותן שמוכלת בקבוצה.
 - תחום: קבוצה נראה תחום אם היא פתוחה וקשירה מסילתית. נשים לב שתחום הוא גם
קשיר פוליגוני. נסתכל על העקום שמחבר בין שתי נקודות, מפתחות נקבל שקיים
אפסילון כך שהעקום רחוק לכול אורכו לפחות אפסילון מהחוץ של הקבוצה, העקום שמחבר
בין שתי הנקודות הוא רציף, ולכן רציף במ"ש ולכן עבור האפסילון שמצאנו יש דלתא
כנדרש. נחלק את התמונה של העקום לנקודות שהמרחק בינן לא יותר מדלתא ונחבר אותן
בקו, יש כמו סופית כזו ולכן ייצרנו קו פוליגוני, לכן הקבוצה קשירה פוליגונית.
- נגזרת / דיפרנציאל:**
- נשים לב שהעתקה לינארית הינה פונקציה רציפה, משום שכפל מטריצות בכול עמודה זה
כמו מכפלה פנימית, ולכן מקושי שוורץ נובעת הרציפות, אפילו במ"ש.
 - דיפרנציאביליות/גזירות: $f: A \subset R^n \rightarrow R^m$ נאמר שהיא גזירה/ דיפרנציאבילית ב $x_0 \in A$
אם קיימת העתקה לינארית $L: R^n \rightarrow R^m$ כך ש $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|)$
או באופן שקול $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$. במקרה שאכן קיימת כזו העתקה
לינארית נסמן $L = Df(x_0)$ כלומר הדיפרנציאל של f בנקודה x_0 . אם $m = 1$ אז ההעתקה
הזו היא למעשה וקטור שורה ונסמן אותו $\nabla f(x_0)$ הגרדיאנט של f בנקודה x_0 .

- נגזרת של עקומה: $\Gamma : [a, b] \rightarrow R$ תקרא גזירה ב x_0 אם קיים הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ נשים לב שבמקרה הפשוט הזה התחום הוא הממשיים, ולכן הגבול מוגדר היטב, ומאיזה כיוון h שואף לאפס. במקרה הזה זה שקול לגזירות בכול קוארדינטה בטווח בנפרד, ולכן הנגזרת תהיה וקטור הנגזרות בכול קוארדינטה בנפרד.
- נגזרת חלקית/כיוונית: עבור $v \in R^n$ וקטור מנורמה 1 נסמן הנגזרת בכיוון v בנקודה x_0 להיות: $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+hv) - f(x_0)}{h}$ כלומר הנגזרת בנקודה כשמתקרבים מכיוון v . נשים לב ש h מספר ממשי. אם נבצע נגזרת כיוונית בכיוון הבסיס הסטנדרטי נקבל את הנגזרת החלקית, כלומר ביחס למשתנה מסוים. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}$. נשים לב שהנגזרת הכיוונית היא פשוט פרישה לנראית של הנגזרות החלקיות.
- משפט: $f: A \rightarrow R^n$ כך ש A תחום ונניח ש f גזירה חלקית בכול כיוון בכול A וגם הנגזרות החלקיות חסומות כלומר $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| < M$ לכול $x \in A$ ולכול i אז f רציפה. זה נובע מכך שהמרחק בין כול שתי נקודות קטן מסכום המרחקים שלהם בכול ציר בנפרד, ואז בכול ציר בנפרד אפשר להשתמש בלגראנג' החד ממדי כי הן גזירות, ומחסימות נוכל לחסום את המרחק בין שני ערכים של הפונקציה שמקורותיהם קרובים על ידי החסם כפול המרחק בין המקורות.
- הקשר בין דפרנציאביליות לנגזרות חלקיות: נניח $f: A \rightarrow R^n$ דיפרנציאבילית ב $x_0 \in A$ פתוחה אז הנגזרות הכיווניות ב x_0 קיימות בכול כיוון v ומתקיים $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = D_f(x_0)v$ נובע מיידית מהסתכלות על הגבול שמגדיר את הנגזרת החלקית, והצבת הדפרנציאל בו. ולכן בפרט קיבלנו שהדפרנציאל הוא הנגזרות החלקיות בעמודות (מהכפלה בבסיס הסטנדרטי) ולכן אם הדפרנציאל קיים הוא יחיד ונתון על ידי הנגזרות החלקיות בעמודות, או הגרדיאנטים של פירוק הפונקציה לפונקציות לתוך R בשורות. נשים לב שדפרנציאל של סכום פונקציות הוא סכום הדפרנציאלים.
- בפרט אם הנגזרות החלקיות לא קיימות הפונקציה לא דיפ' בנקודה, וכמו כן אם היא לא רציפה בנקודה היא לא דיפ' בה.
- דפרנציאבילי ברציפות: נאמר שפונקציה היא דפרנציאבילית ברציפות אם היא דפרנציאבילית בכול נקודה וההעתקה שמתאימה לכול נקודה את מטריצת הדפרנציאל היא העתקה רציפה.
- משפט: פונקציה על קבוצה פתוחה דפרנציאבילית ברציפות אמ"מ כול הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות. אם היא דפרנציאבילית ברציפות אז הנגזרות החלקיות נתונות על ידי הכפלה בדפרנציאל ולכן ברור הן רציפות. אם כול הנגזרות החלקיות רציפות, אז אנחנו יכולים לדעת מי המועמד להיות הדפרנציאל ולבדוק בידיים שהוא אכן כזה על ידי פירוק לכול ציר בנפרד ושימוש בלגראנג' ומהרציפות של הנגזרות נקבל הנדרש.
- כלל השרשרת: $f: R^n \rightarrow R^m$ ו $g: R^m \rightarrow R^k$ ומתקיים כי f דפרנצ' ב x_0 וגם g דפרנצ' ב $f(x_0)$ אז ההרכבה $h(x) = g(f(x))$ שמקיימת $h: R^n \rightarrow R^k$ דפרנצ' ב x_0 ומתקיים $D_h(x_0) = D_g(f(x_0))D_f(x_0)$. ההוכחה היא בכוח לפי הגדרה ושימוש בקושי שזורץ על נורמת הילברט שמידט.
- הגרדיאנט: עבור $f: A \subset R^n \rightarrow R$ שהיא גזירה בנקודה מסוימת x_0 מתקיים שהנגזרת שלה בנקודה היא וקטור שורה $\nabla_f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$ וכמו כן הנגזרת הכיוונית בכול כיוון זה פשוט פרישה לינארית של הנגזרות החלקיות.
- הגרדיאנט מאונך לקווי הגובה: כלומר אם $f: A \subset R^n \rightarrow R$ דיפ' ב x_0 אז נסמן $S = \{f(x) : f(x) = f(x_0)\}$ את קווי הגובה, אז לכול מסילה $\Gamma : [-1, 1] \rightarrow S$ גזירה כך ש $\Gamma(0) = x_0$ אז $\nabla_f(x_0) \perp \Gamma'(x_0)$. זה נובע מיידית מהרכבה של הפונקציה על המסילה

וקבלת פונקציה קבועה $R \rightarrow R$ ולכן נגזרתה אפס, ולכן מכלל השרשרת נקבל שהכפלה הפנימית שלהם היא אפס, שזה אומר שהם מאונכים.

○ **נקודות קריטיות:** עבור פונקציה $f: A \rightarrow R$ והקבוצה A פתוחה ו f גזירה ברציפות אז

נאמר ש $x_0 \in A$ נקודה קריטית אם $\nabla f(x_0) = 0$. נשים לב שנקודות שהן מקסימום/

מינימום מקומי מקיימות שהגרדיאנט מתאפס עליהן, כי אם הן מקס/מיני מקומי אז הן מקס/מיני בכול כיוון, ולכן אם נסתכל על הרכבת הפונקציה שלנו עם מסילה לכול כיוון שהוא, הנגזרת שלה תתאפס ב x_0 כפונקציה חד ממדית ממשפט פרמה, ואז מכלל השרשרת נקבל שהגרדיאנט כפול כול ווקטור הוא אפס, ולכן הגרדיאנט הוא אפס.

○ **נגזרות מסדר גבוהה/ טיילור/ הכרעת מיני או מקסי:** נשים לב שכדי להכריע האם הנקודה

היא מקס/מיני צריך להסתכל על הנגזרות מסדר שני, ונשים לב שהנגזר מסדר שני של פונקציה לתוך הממשים תהיה מטריצה ההסיאן שלה, שזו מטריצת כול הקומבנציות של לגזור פעמיים לפי איזה זוג משתנים שנרצה. כעת נראה שזו מטריצה סימטרית, כלומר שאין חשיבות לסדר הגזירה. ואם היא סימטרית וממשית אז היא לכסינה.

▪ **משפט:** אם $f: A \rightarrow R$ ו A פתוחה ובנקודה מסוימת קיימות הנגזרות החלקיות, והן

$$\text{שתייהן גזירות ברציפות בנקודה הזו אז } \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0). \text{ ההוכחה}$$

נובעת מהעובדה שאם יש לנו שתי נקודות אז להתקרב אליהן תחילה בציר איקס ואז בציר וואי זה כמו קודם בציר וואי ואז בציר איקס, וזה מהשוויון הזה נבצע לגראנג' בצורה חכמה מספר פעמים ונקבל הנדרש.

▪ **טיילור רב משתני ומיון נקודות קיצון:** נשים לב שבהנתן נקודה קריטית כדי להכריע אם היא מיני' מקס' צריך להסתכל על מטריצת ההסיאן ועל ההערכים העצמיים שלה, אם היא מוגדרת חיובית ממש, או שלילית ממש קל לראות שהיא מקס / מיני, אם היא לא הפיכה צריך לגזור שוב. טור טיילור שהרבה משתנים זה זה כמו טור טיילור רגיל רק שהמקדמים של כל חזקה של ההפרש הם כול הדרכים לגזור כמות מסוימת של פעמים, מוצב בנקודה שסביבה מפתחים. הוכחה נובעת ישירות מפיתוח טיילור במשתנה אחד וכלל השרשרת, כאשר הפונקציה במשתנה אחד היא הרכבה של הפונקציה שלנו על מסילה בכיוון מסוים. לכן עבור מיון נקודות קיצון נקבל שכול מה שצריך לעשות זה להסתכל על ההסיאן, מטריצת הנגזרות השניות. אם כול הע"ע חיוביים או כולם שלילים אז כול הכיוונים הנגזרת גדלה/קטנה ולכן זה מיני/ מקס, אם יש עירבוב אז קיים בסיס שבו חלק גדלים וחלק קטנים ולכן זה אוכף(כי היא לכסינה...). אם אחד מהם אפס צריך לגזור שוב.