

נוסחאות:

- הבינום של ניוטון: $\forall n \in \mathbb{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- אי שוויון ברנולי: $\forall x \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1+nx$
- אי שוויון המשולש: $\forall x, y \in \mathbb{R}: ||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$
- אי שוויון הממוצעים: בתנאי שהם חיוביים $\frac{n}{\sum \left(\frac{1}{a_i}\right)} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}$

סדרות

הגדרות:

- אקסיומת השלמות: לכל קבוצה $R \supseteq A$ וחסומה קיים $\inf/\sup A$.
- Sup / inf: חסם המלעיל המינימלי / חסם המלרע המקסימלי של קבוצה. יחיד. לכול ε קיים איבר a בקבוצה כך ש $\sup A - \varepsilon < a$ וקיים a אחר כך ש $\inf A + \varepsilon > a$
- גבול של סדרה:
 - סופי: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n > N_0: |a_n - L| < \varepsilon$
 - אחרות: לכול מרחק קטן ככול שיהיה, קיים מקום בסדרה שהחל ממנו כול איברי הסדרה קרובים לגבול עד כדי המרחק הזה.
 - אין סופי: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_0: a_n \geq / \leq M$
 - הגדרה לפי סביבה: סידרה מתכנסת לגבול L אם בכל סביבה של L נמצאים כול איברי הסדרה למעט מספר סופי.
- תת-סדרה: תהי a_n סדרה אזי b_n תקרא תת סדרה שלה אם קיימת סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ כך ש $b_k = a_{n_k}$
- סדרה מונוטונית: סדרה תקרא מונו עולה אם $\forall n: a_{n+1} \geq a_n$ ומונו יורדת אם ההפך. אם הא"ש חזק אז תקרא מונו חזק
- גבול חלקי: $m \in [-\infty, \infty]$ הוא גבול חלקי של סדרה אם קיימת לה תת סדרה שמתכנסת ל m . טענה שקולה היא להגיד ש m הוא גבול חלקי אמ"מ לכול $\varepsilon > 0$ מתקיים שהקבוצה הנ"ל אינסופית: $\{n \mid |a_n - m| < \varepsilon\}$ כלומר אינסוף מאיברי הסדרה נמצאים בכל סביבה של הגבול החלקי. נשים לב שמבוצאנו ויירשטראס קבוצת כלל הגבולות החלקיים של סדרה, כולל פלוס מינוס אינסוף, אינה ריקה.
- limsup a_n : מוגדר להיות הסופרימום של קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה.
- liminf a_n : מוגדר להיות האינפימום של קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה.
- סגירות סדרתית: נאמר ש קבוצה B סגורה סדרתית אם לכול סדרה שניתן לבנות מאיברה הקבוצה, אם הסדרה שואפת לגבול כלשהו גם הגבול הזה שייך לקבוצה.

גבולות בסיסים:

סדרות:

הוכחה לפי הגדרת הגבול:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ לכול α גדול מאפס
- $\forall 0 < c < 1: \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$
- $\forall a > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (מוכיחים עם בינום ומחיקת כול האיברים חוץ מהשניים הראשונים והעובדה ש $\sqrt[n]{n}$ גדול מאחד ולכן שווה אחד פלוס משהו)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ (מוכיחים באמצעות הטענה ש $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ לכול n שאותה מוכיחים באמצעות הבינום וסכום של סדרה הנדסית סופית)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha q^n = 0$ עבור $\alpha \geq 0$ ו $|q| < 1$ (מוכיחים עם מבחן המנה)

טענות:

- **הרציונליים צפופים בממשיים** כלומר: $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 : \exists q \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ במילים אחרות בין כול שני ממשים יש רציונלי, ומכך נובע בין כול שני ממשיים יש אי רציונלי.
- **תכונת ארכימדס:** $\forall x > 0 \forall y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$ (מוכיחים בשלילה)
- **יחידות הגבול:** אם גבול של סדרה קיים אז הוא יחיד
- סדרה מתכנסת חסומה. סדרה לא חסומה לא יכולה להתכנס.
- אם סדרה מתכנסת לגבול שאינו אפס אז לכול גודל r בין אפס לערך המוחלט של הגבול שלה קיים מקום בסדרה שהחל ממנו כול איברי הסדרה רחוקים מאפס לפחות כמו r
- **אי שוויון חלש נשמר בגבול:** תהייה שתי סדרות $a_n \rightarrow a$ ו $b_n \rightarrow b$ ומתקיים $a_n \geq b_n$ לכול n אז $a \geq b$ (הוכחה עם סופרימום ואינפימום)
- **משפט הסנדוויץ:** אם יש סדרה שהחל ממקום מסוים כלואה בין שתי סדרות שמתכנסות לאותו הגבול אז גם היא מתכנסת לגבול הזה.
- **חשבון גבולות:** תהייה שתי סדרות $a_n \rightarrow L_1$ ו $b_n \rightarrow L_2$ אז:
 - $a_n + b_n \rightarrow L_1 + L_2$ (הוכחה פשוטה אם אפסילון חלקי שתיים)
 - $a_n b_n \rightarrow L_1 L_2$ (הוכחה עם הוספה והחסרה של $a_n L_2$ וא"ש משולש)
 - אם $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{L_1}{L_2}$ ו $L_2 \neq 0$ וגם החל ממקום מסוים $b_n \neq 0$
- **מבחן השורש:** אם מתקיים החל ממקום מסוים $\sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$ עבור $0 < \alpha < 1$ אז הסדרה שואפת לאפס.
- **מבחן השורש הגבולי:** עבור סדרה חיובית אם קיים הגבול $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ אז
 - $L < 1$: אז הסדרה שואפת לאפס
 - $L > 1$: הסדרה שואפת לאינסוף
 - $L = 1$: לא ניתן לדעת כלום.
- **מבחן המנה הגבולי:** עבור סדרה חיובית אם קיים הגבול $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ אז:
 - $L < 1$: הסדרה שואפת לאפס
 - $L > 1$: הסדרה שואפת לפלוס אינסוף
 - $L = 1$: לא יודעים כלום.
- **התכנסות צזארו:** (התכנסות ממוצע חשבוני) אם סדרה מתכנסת אזי גם סדרה הממוצעים שלה מתכנסת לאותו הגבול כלומר הגבול הבא קיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)$ ושווה לגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. מוכיחים על ידי א"ש משולש ופירוק הסכום לשתיים.
- **התכנסות ממוצע הנדסי:** אם סדרה a_n מתכנסת לגבול L אז גם הממוצע ההנדסי של איבריה מתכנס לאותו הגבול וגם הממוצע ההרמוני, נובע מא"ש ממוצעים ומסנדוויץ.

- סדרה מונו עולה וחסומה מלעיל מתכנסת ל- $\sup$ שלה, סדרה מונו יורדת וחסומה מלרע מתכנסת ל- $\inf$ שלה.
- הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מונו עולה וחסומה מלעיל ואת הגבול שלה מסמנים ב- e . הוכחה שהיא עולה באמצעות א"ש ממוצעים
- **תרגיל דלאמבר:** אם למנה של סדרה יש גבול, אז גם לשורש של הסדרה יש גבול והם שווים, הכיוון ההפוך לא נכון. הוכחה על ידי ממוצע הנדסי וטור טלסקופי.
- **משפט שטולץ:** תהייה x_n, y_n סדרות כך ש $\lim y_n = \infty$ ו y_n מונו עולה ממש ומתקיים: $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L$ עבור L סופי או לא אז $\lim \frac{x_n}{y_n} = L$ (מוכיחים באמצעות הלמה שאם סדרה מתכנסת אז גם ממוצע משוקלל של איברה מתכנס לאותו גבול ועל ידי בחירת הסדרה של מנת ההפרשים להיות הסדרה שעלייה עושים ממוצע משוקלל כאשר המכנה של כול איבר הוא המשקל שלו וכך מקבלים טור מצטמצם כמבוקש)
- **משפט הירושה:** תהי a_n סדרה אז אם היא חסומה גם כול תתי הסדרות שלה חסומות, כנ"ל לגבי התכנסות (לאותו הגבול) וכנ"ל לגבי מונוטוניות. ובפרט אם לסדרה יש שתי תתי סדרות שמתכנסות לגבולות שונים הסדרה לא מתכנסת.
- **לכול סדרה יש תת"ס מונוטונית:** אם לסדרה אין איבר מקסימלי אז יש לה תת"ס עולה (מוכיחים עם מקסימומים חלקיים). נסתכל על סדרה כלשהי, או שיש לה תת"ס עולה, או שאם אין לה אז בהכרח יש לה איבר מקסימלי. נסתכל על תת הסדרה של כול האיברים שאחרי האיבר המקסימלי, מירושה אין לה תת"ס עולה ולכן יש לה איבר מקסימלי שקטן מהאיבר המקסימלי הקודם, וכך באינדוקציה בונים תת"ס יורדת.
- **משפט בולצאנו ויירשטראס:** לכול סדרה חסומה יש תת"ס מתכנסת ולכול סדרה יש תת"ס מתכנסת במובן הרחב. (הוכחה קלה מהמשפט שלעיל, או הלמה של קנטור על קטעים מקוננים, דומה לאריה במדבר)
- סדרה מתכנסת לגבול סופי אמ"מ יש לה גבול חלקי יחיד, והוא סופי. (כיוון אחד פשוט מירושה, כיוון שני בשלילה של הגדרת הגבול והעובדה שתת"ס של תת"ס היא תת"ס של הסדרה המקורית)
- **משפט:** קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה חסומה גם כן חסומה ומשיגה את חסמיה, כלומר יש גבול חלקי מקסימלי וגבול חלקי מינמלי ומתקיים שהסופרימום של קבוצת הגבולות החלקיים הוא האינפימום של הקבוצה שמכילה את כול הסופרימומים של תתי סדרות של הסדרה המקורית שמתחילות בהזחה ולכן הוא גם חסם מלעיל על קבוצת הגבולות החלקיים אך גם שייך לה ולכן הוא המקסימום, כנל לגבי המינימום.
- $\limsup a_n = \inf_n \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \dots\}$ וכנ"ל לגבי $\liminf a_n$
- **אוסף הגבולות החלקיים של סדרה הוא קבוצה סגורה סדרתית:** מוכיחים על ידי בניית הרבה תת סדרות לסדרה המקורית כך שכול אחת שואפת לגבול חלקי שהוא איבר בסדרת הגבולות החלקיים ששואפת לאיזשהו גבול. מחיבור כול הסדרות האלה באופן מסוים נקבל סדרה ששואפת לגבול של סדרת הגבולות החלקיים ולכן הגבול הזה גם כן גבול חלקי ולכן הקבוצה סגורה סדרתית.
- **שקילות להגדרת ה $\liminf/\limsup$:** העובדה ש $\alpha = \liminf a_n$ שקולה ל:
 - $a_n < \alpha + \varepsilon$ לכול אפסילון זה מתקיים עבור אינסוף אינדקסים (שכיחה)
 - $a_n > \alpha - \varepsilon$ לכול אפסילון זה מתקיים לכול האינדקסים למעט מספר סופי.
- **קריטריון קושי:** סדרה תקרא סדרת קושי אם כלומר לכול אפסילון החל ממקום מסוים כול איברי הסדרה קרובים עד כדי אפסילון אחד לשני. ההגדרה שקולה להתכנסות של סדרה $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > N_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$. מוכיחים את השקילות בכיוון אחד זה קל, כיוון השני עם תת סדרה.

טורים

הגדרות:

- בהינתן סדרה a_n נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים שלה להיות $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$
- נאמר שהטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים S_n מתכנסת, אחרת נאמר שהוא מתבדר. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$
- **התכנסות בהחלט:** נאמר שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.
- **התכנסות בתנאי:** נאמר שטור מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אבל לא בהחלט.
- **טור חזקות:** טור חזקות סביב x_0 זה הטור: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. זו מעין שפונקציה שלכול x_0 תחזיר טור אחר.
- **רדיוס הכתנסות:** רדיוס התכנסות הוא משפר ממשי שעבור טור חזקות נתון, לכול x שקטן בערכו המוחלט מהרדיוס הטור יתכנס בהחלט ולכול x שגדול בערכו המוחלט מהרדיוס הטור יתבדר. עובר x ששווה בערכו המוחלט לרדיוס צריך לבדוק ידנית.

טורים בסיסיים:

- **הטור ההרמוני:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$ מתכנס אם $\beta > 1$ אחרת מתבדר
- **הטור הגיאומטרי:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ מתכנס אם $|r| < 1$

טענות:

- **תנאי הכרחי להתכנסות טור:** אם טור מתכנס אז האיבר הכללי שואף לאפס, ובפרט אם האיבר הכללי של טור לא שואף לאפס הטור בהכרח לא מתכנס. (נובע מיידיית מחשבון גבולות ומהעובדה שהאיבר הכללי הוא הסכום עד $n+1$ פחות הסכום עד n)
- **קריטריון קושי לטורים:** הטור מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת, נשתמש בקריטריון קושי עליה ונקבל $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall m > N_0 \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \varepsilon$
- **חשבון גבולות לטורים:** אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ שני טורים מתכנסים אז גם: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n$ מתכנס וגם $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n$ מתכנס. לא קיים כפל טורים.
- **התכנסות בהחלט גוררת התכנסות:** (אבל לא להפך). נובע מקושי וא"ש משולש.
- אם שני טורים נבדלים בכמות סופית של איברים אז הם מתכנסים ומתבדרים ביחד.
- **כלים עבור טורים חיוביים:** (נכון רק עבור טורים שכול איבריהם חיוביים!)
 - אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ חיובי אז סדרת הסכומים החלקיים עולה ולכן הטור מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה מעיל.

○ **מבחן ההשוואה:** אם יש שני טורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ כך שהחל ממקום מסוים מתקיים ש $a_n \geq b_n$ אז אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס גם $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס, ואם $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתבדר גם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר.

○ **מבחן השוואה 2:** עבור שני טורים חיוביים אם $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L \neq 0$ אז הם מתכנסים ומתבדרים יחד. אם $L = 0$ אז אם $\sum b_n$ מתכנס אז גם $\sum a_n$ מתכנס ואם $L = \infty$ אז אם $\sum b_n$ מתבדר גם $\sum a_n$ מתבדר.

○ **מבחן השורש:** עבור טור חיובי ממש $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ אם קיים q חיובי קטן ממש 1 כך שמתקיים $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ אז הטור מתכנס. (הוכחה מהשוואה לטור הגיאומטרי עם q)

○ **מבחן השורש הגבולי:** עבור טור חיובי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ אם מתקיים $\lim \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ אז הטור מתכנס. (קטן ממש) אז הטור מתכנס.

○ **מבחן המנה להתכנסות טורים:** עבור טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ חיובי ממש אם קיים q חיובי קטן ממש 1 כך ש החל ממקום מסוים $1 < q \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז הטור מתכנס (הוכחה באמצעות טור טלסקופי של מכפלת המנות, ומבחן ההשוואה עם הטור הגיאומטרי). ואם מתקיים שהחל ממקום מסוים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אז הטור מתבדר. (כי הסדרה עולה ובפרט האיבר הכללי לא שואף לאפס)

○ **מבחן המנה הגבולי:** עבור טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ממש אם מתקיים:

■ $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז הטור מתכנס (ובפרט עבור הגבול)

■ $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז הטור מתבדר לאינסוף (ובפרט עבור הגבול)

(הוכחה פשוטה מתכונות גבול עליון ותחתון ומבנה המנה לטורים)

○ **מבחן העיבוי:** יהיה טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ כך שהסדרה a_n מונו יורדת, חיובית ושונה מאפס. אז הטור הנ"ל מתכנס ומתבדר ביחד עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ (הוכחה באמצעות השוואה דו כיוונית. ניקח את הטור ונקבץ את אבריו לקבוצות בגודל חזקות עולות של שתיים, ומכיוון שהסדרה מונו יורדת אז זה קטן מטור העיבוי, מצד שני פעמיים הטור המקורי ניתן לקבץ לחזקות של שתיים עם האיבר הכי קטן בכל קבוצה וכך לקבל שהוא גדול מטור העיבוי, ולכן הם מתכנסים ומתבדרים יחד)

● כלים לטורים לא בהכרח חיוביים:

○ **משפט לייבניץ:** עבור סדרה a_n אי שלילית מונו יורדת לאפס אז הטור המתחלף $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j$ מתכנס בתנאי. (מוכיחים באמצעות קושי וחיבור כול זוג איברים צמודים כך שיצרו איבר שלילי כי הסדרה יורדת, למעט האיבר הראשון שקטן מאפסילון ה"ממ כי הסדרה מתכנסת לאפס)

○ **משפט אבל:** עבור שתי סדרות a_n ו b_n כך ש $\sum b_n$ מתכנס ו a_n מונוטונית חסומה אז הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

○ **משפט דירכלה:** עבור a_n ו b_n סדרות כך ש: $|\sum a_n| \leq M$ כלומר הטור חסום והסדרה a_n מונו יורדת לאפס אז הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס. (הוכחה באמצעות קושי, כאשר כול איבר של המכפלה מחליפים את האיבר הכללי של a להיות הפרש הסכומים החלקיים וכך מקבלים טור טלסקופי שמשאיר לנו איבר בודד M כפול החסם, משום ש b מונו לאפס נבחר אן מתאים לאפסילון וסיימון)

● **טורי חזקות:** כול טור חזקות סביב x_0 ניתן להגדיר $y = x - x_0$ ולקבל טור חזקות חדש $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k$. מה שמעניין אותנו הוא עבור אילו ערכים של x נקבל טור מתכנס.

- **רדיוס הכתנסות:** לכול טור חזקות קיים רדיוס הכתנסות. (מוכיחים בעזרת חסימות האיבר הכללי והשוואה עם הטור הגיאומטרי)
- **משפט קושי הדמרד:** יהיה r רדיוס הכתנסות של טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ אזי הרדיוס שווה: $\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. הוכחה באמצעות הגדרת הגבול העליון ומראים שזה אכן הרדיוס שלכול איקס שקטן מזה הטור יתכנס ולכול איקס שגדול מזה קיימת תת סדרה מתבדרת לאינסוף ולכן הסכום יתבדר.
- **משפט רימן לטורים:** יהיה טור $\sum a_n$ טור מתכנס. אם הוא מתכנס בהחלט אז כול סידור מחדש של איברי הטור גם כן יתכנס לאותו הגבול. אם הטור לא מתכנס בהחלט אפשר ע"י סידור מחדש של איברי הטור לגרום לטור להתכנס לכול גבול סופי או אינסופי, או לגרום לו להתבדר. (מוכיחים על ידי הפרדה לחיובים ושילילים)

פונקציות

הגדרות:

- **פונקציה:** התאמה בין שתי קבוצות, $f: X \rightarrow Y$ כך שכול איבר ב X מקבל איבר יחיד ב Y .
- **פונקציה חח"ע:** פונקציה שמקיימת: $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- **פונקציה על:** פונקציה שמקיימת: $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
- **פונקציה הופכית:** פונקציה הופכית ל f היא פונקציה כך שאם נרכיב על f משני הכיוונים נקבל את הזהות. הפונקציה ההופכית אם קיימת יחידה.
- **פונקציה מחזורית:** פונקציה תקרא מחזורית אם קיים קבוע ממשי a כך שלכול $x \in R$ מתקיים $f(x) = f(x + a)$
- **פונקציה זוגית:** $\forall x \in R: f(x) = f(-x)$
- **פונקציה אי זוגית:** $\forall x \in R: f(-x) = -f(x)$
- **פונקציה עולה:** פונקציה שמקיימת $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (עולה ממש זה א"ש חזק)
- **גבול:** נשים לב שגבול של פונקציה הוא דבר נקודתי! אך הוא אינו תלוי בערך בנקודה!
- **קושי:** עבור $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow R$ כלומר פונקציה מסביבה מנוקבת שלא כוללת את הנקודה עצמה. אז נאמר ש $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ אם מתקיים: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- **היינה:** נאמר ש $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ אם מתקיים שלכול סדרה שמוכלת בסביבה $f(x_n) \rightarrow L$ המנוקבת של x_0 ושואפת ל x_0 אבל אף פעם לא שווה לו מתקיים ש $f(x_n) \rightarrow L$
- **גבול חד-צדדי:** זהה להגדרת הגבול רק שהאינסים צריכים להיות בסביבה ימנית/שמאלית של הנקודה, ולא משני הצדדים כפי שהדרישה בגבול.
- **גבול אינסופי:** נאמר שהגבול בנקודה של פונקציה הוא $\pm \infty$ אם מתקיים: $\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta : f(x) > M$ באופן דומה עבור מינוס אינסוף.
- **גבול באינסוף:** נאמר שהגבול של פונקציה בפלוס/מינוס אינסוף הוא L אם מתקיים שלכול מרחק מהגבול קיימת סביבה של אינסוף עבורה ערכי הפונקציה קרובים לגבול עד כדי המרחק הזה: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L : \forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall x \in (R, +\infty): |f(x) - L| < \varepsilon$
- **רציפות:** תכונה נקודתית של פונקציה. נאמר כי f רציפה ב x_0 אם הגבול ב x_0 קיים ושווה לערך הפונקציה בנקודה x_0 כלומר $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. נאמר ש f רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה בקטע.

- לפי היינה נאמר שפונקציה רציפה בנקודה אמ"מ לכול סדרה $x_n \rightarrow x_0$ כולל x_0 עצמו ערכי הפונקציה של הסדרה שואפים ל $f(x_0)$. נשים לב שמספיק להניח שלכול סדרה שכזו קיים הגבול ולא חייבים להראות שהוא שווה לערך בנקודה, כי זה נובע מיצירת סדרה שמורכבת משתי תתי סדרות, האחת ששואפת ל x_0 והשנייה זהותית x_0 וכך מירושה מתקבל המבוקש.
- **רציפות חד צדדית:** f רציפה מימין/משמאל בנקודה x_0 אם הגבול החד – צדדי קיים ושווה לערך בנקודה. באופן ד"י ברור הפונקציה רציפה בנקודה אמ"מ היא רציפה חד צדדית בה משני הכיוונים.
- **נקודות אי רציפות:**
 - סליקה: הגבול בנקודה קיים ושונה מהערך בנקודה/ הפונקציה לא מוגדרת בנקודה.
 - סוג ראשון: הגבולות החד צדדים קיימים וסופיים אבל שונים.
 - סוג שני: כול דבר אחר, למשל הגבולות החד צדדים לא קיימים, או שווים אינסוף.
- **רציפות במידה שווה:** תכונה כל פונקציה רציפה על קטע, אין לזה משמעות בנקודה מסוימת. נאמר ש $f: A \rightarrow R$ רציפה במידה שווה ב A כאשר A קטע מוכלל אם מתקיים: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x, y \in A |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ כלומר לכול מרחק אפסילון שהוא קיים מרחק דלתא כך שלכול שתי נקודות בקטע שקרובות עד כדי דלתא הערכים שלהם קרובים עד כדי אפסילון. כדי לשלול רציפות במ"ש מספיק להראות שתי סדרות שההפרש ביניהן שואף לאפס אבל ההפרש בערכיהן לא שואף לאפס.
- **נגזרת:** עבור פונקציה f נאמר כי f גזירה בנקודה x_0 אם קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ והוא סופי. וערכו של הגבול הוא הנגזרת בנקודה. נאמר שפונקציה גזירה בקטע אם היא גזירה בכל נקודה בו וגזירה חד צדדית בקצוות. באופן שקול אפשר להגדיר $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ נשים לב שכדי להיות גזירה, הפונקציה צריכה להיות מוגדרת בנקודה.
- **נגזרת חד צדדית:** ניתן להגדיר נגזרת מימין ומשמאל בנקוד וזה שקול לגבול החד צדדי של הנגזרת כפי שרשום למעלה.
- **נקודות אקסטרמום:** נאמר שנקודה היא מינימום מקומי אם קיימת סביבה שלה כך שלכול איקס בסביבה ערך הפונקציה שלו גדול שווה לערך הפונקציה במינימום. כנ"ל לגבי מקסימום. אם הסביבה של נקודת אקסטרמום היא כול הקטע אז היא אקסטרמום גלובלי.
- **קמירות:** פונקציה f תקרא קמורה אם ("המיתר נמצא מעל לגרף הפונקציה") כלומר עבור קטע פתוח: $\forall x_1, x_2 \in I: \forall \alpha \in (0,1): f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$

טענות:

- אם פונקציה f עולה והפיכה אז גם f^{-1} עולה. כנ"ל לגבי יורדת
- ההגדרות של היינה וקושי לגבול שקולות. $H \rightarrow C$: מוכיחים בקונטרהפוזיציה. הכיוון ההפוך נובע ישירות מהגדרת הגבול של קושי.
- **יחידות הגבול:** הוכחה פשוטה מהיינה, לוקחים שתי סדרות של איקסים ששואפות ל x_0 אבל ערכיהם שואפים לשני גבולות שונים, בונים סדרה חדשה שמכילה את שתי תתי הסדרות האלה ולכן שואפת ל x_0 אבל סדרת הערכים שלה לא מתכנסת וזה בסתירה לקיום הגבול לפי היינה.
- גבול של פונקציה בנקודה קיים אמ"מ הגבולות החד צדדים קיימים ושווים.
- **חשבון גבולות:** תהיינה f ו g שתי פונקציות מסביבה מנוקבת של x_0 לישר אז אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ אז $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + m$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = Lm$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{m}$ בתנאי ש $m \neq 0$ ולכול x בסביבה g לא מקבלת את הערך 0
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = L^m$
- **כלל ההרכבה:** תהיינה שתי פונקציות: $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow J \setminus \{y_0\}$ ו- $g: J \setminus \{y_0\} \rightarrow R$. כך שמתקיים: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$; $\lim_{y \rightarrow y_0} L$ אז מתקיים: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$. נשים לב כי ניתן להשמיט את הדרישה לסביבה מנוקבת בטווח של f ובתחום של g אם g רציפה בנקודה y_0
- **משפט הסנדוויץ':** עבור שלוש פונקציות f, g, h מסביבה מנוקבת של x_0 אם מתקיים ש $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ וגם $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. נובע מהגדרה של היינה ומסנדוויץ על סדרות.
- **חשבון רציפות:** אם f ו- g רציפות בנקודה כלשהי אז סכומן, מכפלתן, ומהתן רציפה באותה הנקודה. (נובע מיידיית מחשבון גבולות). בנוסף גם הרכה של פונקציות רציפות, רציפה.
- עבור פונקציה מונוטונית בקטע פתוח הגבולות החד – צדדים בקצוות קיימים במובן הרחב. נובע מהעובדה שסדרה מונוטונית מתכנסת לסופרמום שלה במובן הרחב.
- **משפט ויירשטראס:** תהי פונקציה רציפה בקטע סגור אז היא חסומה ומשיגה את חסמיה. חסימות מוכיחים בשלילה, באמצעות סדרות, בולצאנו ויירשטראס והעובדה שאינסוף לא יכול להיות ערך של הפונקציה בנקודה. את השגת החסמים מוכיחים באמצעות הגדרת החסם על ערכי הפונקציה, מתכונות החסם קיימת סדרה של ערכים ששואפת אליו, ולכן ניתן לקחת סדרה חסומה בקטע שערכיה שואפים לחסם, מבולצאנו ויירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת לנקודה ולכן מרציפות הערך בנקודה הזו שווה לערך החסם ולכן החסם מושג.
- **משפט ערך הביניים:** פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת כול ערך בין ערכי הקצוות שלה. מוכיחים תחילה שעבור פונקציה שקצה אחד שלה שלילי וקצה שני חיובי היא מקבלת את אפס ואז באמצעות הוספת קבועה נובע שהיא מקבלת כול ערך בין הקצוות שלה. הוכחה באמצעות הגדרת קבוצת כול האיקסים שערכיהם שליליים, לקיחת סופרימום לקבוצה הנ"ל. מהגדרת הסופרמום קיימת סדרה של איקסים ששואפת אליו ומרציפות ערכיהם שואפים לערך שלו שקטן ממש מאפס, משמירת א"ש בגבול הערך של הפונקציה בנקודת הסופרמום קטן שווה אפס, בשלילה מראים שהוא לא קטן מאפס כי אז היה קיים איקס גדול ממנו שגם ערכו היה קטן מאפס וזה סתירה לכך שהוא הסופרמום, ולכן הערך בנקודת הסופרמום שווה אפס.
- **תמונה:** תמונה רציפה של קטע סגור היא קטע סגור. נובע מוירשטראס וערך הביניים. ובפרט תמונה רציפה של קטע מוכל היא קטע מוכלל
- **פונקציות מונוטוניות:** פונקציה חח"ע ורציפה היא מונוטונית ממש. הוכחה בשלילה עם ערך הביניים. לכול פונקציה מונוטונית הגבולות החד צדדים בכול נקודה קיימים במובחן הרחב. פונקציה רציפה וחח"ע(מונוטונית) אז ההופכית שלה רציפה. מוכיחים בשלילה באמצעות סדרות ושימוש במונוטוניות הפונקציה.
- אם יש שתי פונקציות רציפות ובנקודה מסוימת האחת גדולה מהשניה ממש אז קיימת סביבה בה היא גדולה ממנה.
- **משפט קנטור:** פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה. מניחים בשלילה שלא מתקיים לוקחים שתי סדרות שהפרשן שואף לאפס ולכאורה הפרש ערכיהן לא שואף לאפס, מבולצאנו ויירשטראס לשתייהן יש תת סדרה ששואפת לאותו הגבול ולכן מרציפות ערכיהן שואפים לאותו הגבול ולכן הפרש ערכיהן שואף גם כן לאפס וזו סתירה.
- **רציפות במ"ש בקטע פתוח וסופי:** תהי f רציפה בקטע חצי פתוח אז היא רציפה בו במ"ש אמ"מ הגבול החד צדדי בקצה הפתוח קיים וסופי. כיוון אחד פשוט מרחיבים את הפונקציה ומגדירים אותה בקצה להיות הערך בגבול ולכן היא רציפה כעת בקטע סגור ולכן במ"ש ובפרט בקטע הפתוח. כיוון השני מוכיחים בכך שמראים שלכול סדרה ששואפת לקצה קיים גבול לסדרת הערכים שלה ולכן מהיינה קיים הגבול בקצה. הסדרה ששואפת לקצה היא

קושי ולכן בכלל שהפונקציה במ"ש אז ה"מ גם סדרת הערכים של הסדרה היא קושי ולכן מתכנסת.

- **רציפות במ"ש בקטע פתוח ואינסופי:** עבור פונקציה רציפה בקטע פתוח ואינסופי אם קיים וסופי הגבול באינסוף אז היא רציפה במ"ש בקטע. (לא נכון בכיוון ההפוך)
- **הדבקה של רציפות במ"ש:** אם f רציפה במ"ש ב $(a,b]$ וב $[b,c)$ אז היא רציפה במ"ש ב (a,c) מוכיחים באמצעות לקיחת הדלתא המינימלי.

נגזרות:

- פונקציה גזירה בנקודה אמ"מ היא גזירה בה מימין ומשמאל.
- גזירות גוררת רציפות. הוכחה פשוטה מחשבון גבולות ורציפות פונקצית הזהות.
- **חשבון גזירות:** עבור $g \circ f$ גזירות בנקודה x_0 אז מתקיים:
 - $(f \pm g)' = f' \pm g'$ חשבון גבולות פשוט.
 - $(f * g)' = f'g + g'f$ חשבון גבולות + הוספה והחסרה של גורם בנוסף לעובדה שגזירות גוררת רציפות.
 - $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ שוב חשבון גבולות ואלגברה.
- **כלל לייבניץ:** עבור נגזרת מסדר גבוה מתקיים $(f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ מוכיחים באינדוקציה עם חשבון רציפות.
- **כלל השרשרת:** עבור פונקציה f שגזירה ב x_0 ופונקציה g שגזירה ב $f(x_0)$ וכול אחת מוגדרת בסביבה של הנקודה בה היא גזירה אז ההרכבה גזירה ב x_0 ומתקיים:
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$
 מוכיחים על ידי הגדרת פונקציה חדשה מהטווח של f שמקבלת בכול נקודה את ערך שיפוע המשיק ל g מלבד בנקודה $f(x_0)$ שם היא מקבלת את ערך הנגזרת של g .
- **נגזרת של הפוכית:** $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
- **משפט פרמה:** עבור פונקציה מקטע סגור שיש לה נקודת אקסטרמום לא בקצה והיא גזירה בנקודה הזו אז הנגזרת בה שווה אפס. מוכיחים עם נגזרות חד צדדיות.
- **משפט רול:** לפונקציה בקטע סגור כך שערכיה בקצוות שווים קיימת נקודה בפנים הקטע שבה הנגזרת מתאפסת. נובע ישירות מווירשטראס ופרמה.
- **משפט לגראנז':** עבור פונקציה רציפה בקטע סגור וגזירה בקטע הפתוח קיימת נקודה c בקטע הפתוח כך שמתקיים: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. הוכחה מהגדרת הישר שעובר בשני הקצוות והגדרת פונקצית ההפרש בין הפונקציה לבין הישר. הערך של הפונקציה הזו בקצוות שווה ולכן מרול יש נקודה בה הנגזרת מתאפסת. הנגזרת של הישר שמחבר את הקצוות היא בדיוק הנדרש.
- **יחידות:**
 - עבור פונקציה רציפה וגזירה כך שלכול נקודה בקטע הפתוח הנגזרת היא אפס אז הפונקציה בהכרח שווה לקבוע כלשהו. נובע ישירות מלגראנז.
 - עבור שתי פונקציות רציפות וגזירות שנגזרתן שווה בכול נקודה הן בהכרח שוות אחת לשנייה עד כדי הוספת קבוע.
 - לכול פונקציה כך שלכול נקודה $f(x) = f'(x)$ נתקיים שקיים קבוע עבורו $f(x) = c * e^x$. מוכיחים עם הגדרת פונקציה שהיא החלוקה ביהם.
- **ערך הביניים של קושי:** עבור $g \circ f$ פונקציות רציפות בקטע סגור וגזירות בקטע הפתוח קיימת נקודה c בפנים הקטע כך ש: $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. מוכיחים באמצעות הגדרת פונקציה שהיא ההפרש ביניהן כך שבקצוות היא זזה ולכן מקיימת את רול.
- **עלייה / ירידה:** עבור פונקציה מקטע אשר גזירה בקטע הפונקציה עולה ממש בקטע אמ"מ הנגזרת חיובית ממש ויורדת ממש בקטע אמ"מ הנגזרת שלילית ממש. הוכחה פשוטה מלגרנג' וגבולות חד צדדים. נשים לב שזה תכונה על קטע ולא תכונה נקודתית.

- **נקודות קיצון:** עבור פונקציה רציפה וגזירה פעמיים בנקודה x_0 כך שהנגזרת הראשונה מתאפסת בנקודה הזו אז אם הנגזרת השנייה בנקודה חיובית זה מינימום מקומי אם הנגזרת השנייה שלילית זה מקסימום מקומי ואם שווה אפס אי אפשר לדעת. הוכחה באמצעות הגדרת הנגזרת השנייה, מציאת סביבה בה היא גדולה/קטנה ממש מאפס ואז מלגראנג מתקבל הנדרש תוך משחק עם מכנה חיובי/שלילי. כדי למצוא נקודות קיצון של פונקציה בקטע פתוח מטפלים בנקודות הקריטיות בקטע ומסתכלים על הגבולות החד צדדיים בקצוות.
- **אי רציפות של נגזרת:** לנגזרת לא יכולה להיות נקודת אי רציפות סליקה, כלומר עבור פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) מתקיים שאם קיים הגבול של הנגזרת בקצה: $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ וסופי אז f גזירה מימין ב a והנגזרת החד צדדית שם שווה לערך הגבול. מוכיחים עם אינסוף לגראנגים וגבול. ולכן אם פונקציה גזירה ברציפות בקטע מנוקב ולנגזרת יש גבול בנקודה החסרה אז הגבול הוא הנגזרת בנקודה.
- **ערך הביניים של הנגזרת:** עבור פונקציה גזירה בקטע פתוח, לכול שתי נקודות בקטע ולכול ערך בין ערכי הנגזרות של הנקודות קיימת נקודה ביניהן שמקבלת ערך נגזרת כזה. נשים לב כי לא נאמר שהנגזרת רציפה ולכן לא ניתן פשוט להשתמש בערך הביניים.
- **נגזרת חסומה:** פונקציה בעלת נגזרת חסומה היא רציפה במ"ש. נובע מלגראנג ומהעובדה שפונקציה k ליפשיץ היא במ"ש.
- **כלל לופיטל: למקרה של $0/0$ ונקודה סופית:** תהייה f, g שתי פונקציות גזירות בסביבה מנוקבת של x_0 כך שמתקיים התנאים הבאים:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
 - $g'(x) \neq 0$ בכול הסביבה המנוקבת
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים
 אז מתקיים ש: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **הוכחה:** מרחיבים את הפונקציות להיות מוגדרות אפס בנקודה x_0 מבצעים את משפט קושי ומקבלים שמנת הנגזרות בנקודה מסוימת שווה למנת הנגזרות בנקודה שנמצאת בינה לבין x_0 לוקחים גבול לשני האגפים ומקבלים הנדרש.
- **כלל לופיטל מהצורה $0/0$ כאשר הגבול באינסוף:** אותם התנאים של לופיטל רגיל רק שכעת מדובר בסביבה של אינסוף והגבול הוא באינסוף. מוכיחים בקלות באמצעות החלפת משתנה והלופיטל שהוכחנו לעיל.
- **כלל לופיטל מהצורה ∞/∞ :** עבור אותם התנאים כמו לופיטל הקודם רק כאשר הגבול של המכנה הוא אינסוף, ולא אפס, ולא דורשים שלמונה יהיה גבול. דורשים שגבול מנת הנגזרות יהיה סופי אז מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. הוכחה מסורבלת מהגדרת הגבול, משפט קושי והרבה חשבון גבולות ואלגברה.
- **משפט שלושת המיתרים:** אם f קמורה אז עבור $M_{ij} = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$ כאשר $i < j \rightarrow x_i < x_j$ אז מתקיים $M_{12} \leq M_{13} \leq M_{23}$. כלומר עבור פונקציה קמורה השיפוע של ישר שעובר בשתי נקודות שלה גדל ככול שהנקודות האלה יותר "גדולות" כלומר קרובות לקצה הימני של הקטע. כלומר אם נקח שתי נקודות, נקבע אחת ונזיז השנייה ימינה שיפוע המיתר ביניהן רק יגדל.
- **קמירות:** פונקציה קמירה אמ"מ הנגזרת שלה עולה בקטע. אם הפונקציה גזירה פעמיים אז הפונקציה קמורה אמ"מ הנגזרת השנייה שלה חיובית בקטע. (קעורה זה ההפך ומקמורה)

גבולות בסיסים:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. מוכיחים באמצעות העובדה $x \leq \tan x$ בסביבת אפס ומסנדוויץ ביחד עם העובדה ש $\sin x \leq x$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$ כאשר $a > 0$. מראים שזה נכון עבור מספרים טבעיים עם שטולץ ואז עושים סנדוויץ לכול מספר עם הערך השלם שלו מלמעלה ואפס מלמטה.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ כאשר $a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty$ מלופיטל.

נגזרות בסיסיות:

- $\sin(x)' = \cos(x)$ (מוכיחים עם זהות טריגו של חיסור סינוסים)
- $\cos(x)' = -\sin(x)$
- $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ בכול נקוד חוץ מאפס, באפס היא לא גזירה.
- $\ln x' = \frac{1}{x}$ מוכיחים מהגדרה עם חשבון גבולות של e.
- $x^{n'} = nx^{n-1}$ באינדוקציה. וכמו כן $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ מחשבון גזירות.
- $a^{x'} = a^x \ln a$

פונקציות אלמנטריות: פונקציות שמקיימות שהגבול בנקודה הוא הערך בנקודה.

- **פונקציית הזהות:** הפונקציה שמתאימה לכול מספר את עצמו ובפרט לכול פולינום מתקיים שהגבול בנקודה שווה לערך בנקודה (נובע מחשבון גבולות ואלמנטריות הזהות)
- **פונקציית החזקה:** $f(x) = x^a$ התחום הוא החלק החיובי של הישר כי אין משמעות לחזקה אי רציונלית של מספר שלילי. חח"ע ועל. רציפות נובעת ממונוטוניות כי כול נקודת אי רציפות צריכה להיות מסוג ראשון אבל אז היא לא הייתה על.
- **הפונקציה המעריכית:** $f(x) = a^x$ ($a > 0$) פונקציה מכול הישר לחלק החיובי של הישר. נשים לב שאין משמעות למספר שלילי בחזקה אי רציונלית. נשים לב כי פונקציית החזקה עבור הטבעיים מונו עולה, ניתן להראות שגם עבור הרציונליים היא מונו עולה באמצעות שברים, וכעת נגדיר לכול r אי רציונלי $x^{b_n} := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{b_n}$ כשר b_n סדרה מונו יורדת ל r . זה מוגדר היטב ואפשר להוכיח באמצעות מונוטוניות, חסימות וסנדוויץ. חח"ע ועל. רציפות מוכיחים תחילה עבור אפס באמצעות העובדה שהיא מונוטונת עבור $a > 1$ ובאמצעות סנדוויץ והעובדה ששורש אני של מספר שואף לאחד. בכול נקודה אחרת זה נובע מחוקי חזקות.
- **פונקציית הלוגריתם:** ההופכית של הפונקציה המעריכית: $f(x) = \log_a y$ ולכן רציפה כי המעריכית מונוטונית.
- **סינוס:** $f(x) = \sin(x)$. $f: R \rightarrow [-1, 1]$ נשים לב שאם מצמצמים את הפונקציה לקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ אז היא חח"ע ועל. ולכן יש לה הופכית $\arcsin(x)$. נשים לב כי מתקיים לכול x $|\sin x| \leq |x|$
- **קוסינוס:** מוכיחים באמצעות העובדה ש $|\sin x| \leq |x|$ שאותה מוכיחים עם מעגל היחידה ובאמצעות זהות טריגו.

פונקציות מיוחדות:

- פונקציית רימאן: מוגדרת להיות $\frac{1}{q}$ לכל $\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \gcd(p, q) = 1$ ואפס אחרת. בכול נקודה בקטע $[0, 1]$ הגבול בה הוא אפס, ולכן היא רציפה לאי רציונלים ולא רציפה לרציונלים. מוכיחים עם העובדה שיש רק כמות סופית של שברים מצומצמים עם מכנה מסוים בקטע מסוים.
- פונקציית דירכלה: שווה 1 לכל האי רציונלים ואפס לרציונלים.
- פונקציית ויירשטראס: רציפה בכול נקוד אבל לא גזירה בשום מקום.
- מדרגות השטן: רציפה! "מונו עולה מ 0 ל 1" אבל הנגזרת אפס בכול מקום.

טיילור

הגדרות:

- O-notation: עבור שתי פונקציות מוגדרות בסביבת הנקודה x_0 כך שהגבול של שתיהן בנקודה הוא אפס והן רציפות בה נאמר כי:
 - **Big O**: נאמר ש $f = O(g)$ אם קיים קבוע c ממשי וקיימת סביבה של הנקודה x_0 כך שלכול איקס בסביבה מתקיים $|f(x)| < |c * g(x)|$
 - **Small o**: נאמר כי $f = o(g)$ אם מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
 - **Teta θ** : אם מתקיים שבסביבה כלשהי של x_0 מתקיים $f = O(g); g = O(f)$ נאמר כי $f = \theta(g)$ (סימטרי)
 - **טענה**: אם $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = c > 0$ אז $f = \theta(g)$ הוכחה פשוטה מהגדרת הגבול
- הזדהות: נאמר ששתי פונקציות מזדהות עד לסדר n בנקודה מסוימת אם מתקיים שלכול מספר k בין 0 ל n $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$
- פולינום טיילור: עבור פונקציה מקטע מוכלל הגזירה n פעמים בנקודה בפנים הקטע אז פולינום טיילור שלה סביבה x_0 מסדר n הוא פולינום ממעלה n המזדהה עם f עד לסדר n בנקודה. הרעיון הוא לקוות שהפונקציה תהיה שווה זהותית לפולינום שלה בכול נקודה כאשר n שואף לאינסוף, לא תמיד זה קורה!
- שארית: עבור פונקציה כנ"ל ופולינום הטיילור שלה נגדיר את השארית של f מסדר n סביב x_0 להיות $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ נשים לב כי $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$
- טור טיילור: עבור פונקציה שגזירה אינסוף פעמיים סביב נקודה מסוימת טור טיילור שלה הוא הגבול כשאן הולך לאינסוף של פולינום טיילור שלה.

טענות: כדי שפונקציה תהיה שווה לטור טיילור שלה צריך שהשארית תשאף לאפס כשאן שואף לאינסוף.

- עבור f ו g גזירות n פעמים x_0 אשר מזדהות עד לסדר n בנקודה אז $f(x) - g(x) = o(x - x_0)^n$ כלומר $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. הוכחה באינדוקציה עם הגדרת הגבול ולגרנג'

- עבור פונקציה מקטע הגזירה n פעמים בנקודה אז קיים יחיד פולינום טיילור שלה מסדר n סביב הנקודה והוא: $P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$. הוכחה פשוטה מלגזור את הפולינום כמות נכונה של פעמים ולראות שהוא אכן מזדהה.
- **משפט פאנו:** עבור פונקציה כנ"ל והפולינום שלה אז $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0$.
- **שארית לגראנז':** עבור פונקציה מקטע הגזירה בו $n+1$ פעמים ועבור נקודה x_0 בקטע ועבור פולינום הטיילור שלה מסדר n סביב הנקודה מתקיים שלכול x בקטע קיימת נקודה c בין x ל x_0 כך ש $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$. נשים לב ש c תלויה באיקס. מוכיחים באמצעות משפט קושי איטרטיבי והעובדה שהשארית מתאפסת עד סדר n .
- **שארית קושי:** עבור פונקציה מקטע הגזירה בו $n+1$ פעמים ועבור נקודה x_0 בקטע ועבור פולינום הטיילור שלה מסדר n סביב הנקודה מתקיים שלכול x בקטע קיימת נקודה c בין x ל x_0 כך ש $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!} (x - c_x)^n (x - x_0)$. מוכיחים על ידי הגדרת פונקציה חדשה שלכול t תיתן את המרחק של הפונקציה בנקודה איקס לטור טיילור שפותח סביב איקס עבור t .
- **מסקנה:** עבור פונקציה גזירה אינסוף פעמים אשר מתקיים שכול הנגזרות שלה חסומות על ידי אותו החסם אז השארית שואפת לאפס ולכן הפונקציה מזדהה עם טור טיילור שלה כאשר n שואף לאינסוף. לדוגמא סינוס, כול הנגזרות שלה חסומות ע"י 1.
- **מסקנה לגבי e :** נשים לב ש e^x מזדהה עם טור טיילור שלו כי השארית שואפת לאפס לכול איקס. נשים לב שלכן אי לא רציולני, כי נניח בשלילה שהוא רציולני נשווה אותו עם טור טיילור שלו מלגראנז קיימת השארית ושווה לנגזרת ה $n+1$ של e חלקי $n+1$ עצרת כפול e^c אבל c קטן מאחד ולכן זה קטן מאי חלקי $n+1$ עצרת וזה קטן מאחד וקיבלנו שיש מספר טבעי בין אפס לאחד, סתירה.
- **הטור ההרמוני המתחלף:** שואף ל $\ln 2$ כי $\ln(1+x)$ מזדהה עם הטור שלו בנקודה אחד כי השארית שואפת לאפס בנקודה הזו, והטור שלו הוא בדיוק הטור ההרמוני המתחלף. נשים לב שעבור נקודה גדולה מאחד טור טיילור של $\ln$ לא מתכנס בכלל, בין אפס לאחד מתכנס, ובין אפס למינוס אחד נצטרך להשתמש בשארית קושי.
- **יחידות:** אם ניתן לרשום שפונקציה שווה לפולינום ממעלה n פלוס שארית כך שהשארית היא או קטן של $(x - x_0)^n$ אז בהכרח הפולינום הוא פולינום טיילור של הפונקציה.
- **מסקנה:** עבור פונקציה גזירה $n+1$ פעמים והנגזרת האחרונה רציפה ו n הנגזרות הראשונות מתאפסות בנקודה מסיימת והנגזרת ה $n+1$ בנקודה לא אפס אז אם n זוגי זו איננה נקודת קיצון, אחרת זו כן נקודת קיצון.
- עבור פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבה של x_0 וכול אחת מהנגזרות חסומה על ידי חסם משלה $|f^{(m)}(x)| < a_m$ לכול איקס בסביבה ומתקיים $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m!} * c^m = 0$ עבור c כלשהו חיובי אז לכול איקס בסביבת c של x_0 הפונקציה שווה לטור טיילור שלה.

טיילור של פונקציות בסיסיות:

- $f = e^x, x_0 = 0$ אז הפולינום מסדר n : $P_n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
- $f = \sin(x), x_0 = 0$ אז: $P_{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $f = \cos(x), x_0 = 0$ אז: $P_{2n} = P_{2n+1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$
- $f = \ln(1+x), x_0 = 0$ אז: $P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$

טענות שצריך לדעת להוכיח

1. תהי $A \subset \mathbb{R}$ חסומה מלעיל והיה $b \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A אזי הטענות הבאות שקולות:
 - a. $b = \sup A$ (כאשר סופרמום מוגדר להיות החסם מלעיל המינימלי)
 - b. לכול חסם מלעיל d של A מתקיים $d \geq a$
 - c. אם $a < b$ אז a לא חסם מלעיל של A
2. משפט הסנדוויץ' לסדרות. כלומר יש שתי סדרות ששואפות לאותו הגבול וסדרה נוספת שהחל ממקום מסוים כלואה ביניהן. הוכחה פשוטה מהגדרת הגבול.
3. סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל מתכנסת לסופרמום וסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע מתכנסת לאינפמום. הוכחה מהגדרת הסופרמום עם האפסילון מהגדרת הגבול.
4. סדרה אינה חסומה מלעיל אם "מ פלוס אינסוף הוא גבול חלקי שלה. כיוון אחד ממש קל כיוון שני מוכיחים על ידי בנייה אינדוקטיבית של סדרה שכול פעם האיבר בה גדול מהמספר הטבעי שמייצג את המיקום שלו.
5. אוסף הגבולות החלקיים של סדרה זו קבוצה סגורה סדרתית. בונים סדרה של גבולות חלקיים ששואפת לגבול מסוים, לכול גבול חלקי בסדרה הזו לוקחים תת סדרה ששואפת אליו ולכן החל ממקום מסוים היא קרובה אליו עד כדי אפסילון. נבנה סדרה חדשה שהאיברים בה נבחרו מכול סדרה החל מהמקום בו היא קרובה מספיק והם נבחרו בסדר עולה, וככה הסדרה הנ"ל שואפת לגבול המבוקש.
6. סדרה מתכנסת אם "מ היא סדרת קושי. מוכיחים טענת עזר שסדרת קושי חסומה כי ה"מ מ כולם קטני מהאיבר במקום הזה ועוד אחד וגדולים ממנו פחות אחד ולכן חסומים פלוס מספר סופי לפני זה. הכיוון שסדרה מתכנסת היא קושי קל מהגדרת הגבול עם חצי אפסילון. הכיוון השני נובע כי בגלל שהיא חסומה יש לה תת"ס מתכנסת מבולצאנו ויירשטראס, ולכן ה"מ מ איבר התת"ס קרובים לגבול עד כדי חצי אפסילון, אבל ה"מ מ אחר כול האיברים בסדרה קרובים עד כדי חצי אפסילון, ולכן מא"ש משולש נקבל המבוקש.
7. התכנסות בהחלט גוררת התכנסות. טור הערכים המוחלטים מתכנס, ולכן מקיים קושי, ולכן מא"ש משולש גם המקורי מקיים קושי.
8. משפט לייבניץ. טור של סדרה חיובית מונו יורדת לאפס בסימנים מתחלפים מתכנס. נוכיח שמתקיים קושי, מראים תחילה שהביטוי בערך המוחלט הוא חיובי ולכן ניתן להסיר את הערך המוחלט, ואז מראים שהביטוי כולו קטן מהאיבר הראשון כי הסדרה יורדת. ה"מ מ האיבר הראשון קטן מאפסילון ולכן מתקיים קושי והטור מתכנס.
9. הגדרת הגבול לפי קושי והיינה שקולות. קושי גורר היינה נובע מהעובדה שלכול אפסילון קיימת דלתא, ובגלל שמדובר בסדרות שמתכנסות לאיקס אפס אז החל ממקום מסוים הם קרובות עד כדי דלתא ולכן ערכיהן קרובים לגבול עד כדי אפסילון. היינה גורר קושי מוכיחים בשלילה. מניחים שקושי לא מתקיים אז יש אפסילון שלכול דלתא יש איבר שקרוב לאיקס אפס עד כדי דלתא אבל ערכו רחוק מהגבול יותר מאפסילון ובפרט עבור סדרת דלתות מהצורה $1/n$ ואז נקבל סדרת נקודות ששואפת לאיקס אפס אבל ערכיהן רחוקים מהגבול וזו סתירה להנחה ולכן קושי מתקיים.
10. משפט ויירשטראס. פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה ומשיגה חסמיה. מניחים בשלילה שלא חסומה אז יש סדרה של ערכים ששואפת לאינסוף, אז יש סדרה של איקסים שמקבלים ערכים אלה, הם חסומים בקטע אז יש להם תת"ס מתכנסת לאיזשהו איקס אבל מרציפות הגבול שווה לערך בנקודה, וערך בנקודה אינו אינסוף וזו סתירה. עכשיו מגדירים סופרמום לקבוצת הערכים שהפונקציה מקבלת, מתכנסת סופרמום יש סדרה של ערכים ששואפת אליו, יש סדרה של איקסים שמקבלת ערכים אלה, יש לה תתס מתכנסת לאיקס כלשהו, הערך באיקס הזה שווה לגבול מרציפות, והגבול הוא הספרמום ולכן הוא מושג.

11. משפט קנטור: פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במ"ש. נניח בשלילה שלו אז קיים אפסילון עבורו שום דלתא לא מספקת את התנאי, ובפרט כול דלתא מהצורה $1/n$ ולכן ניתן לקחת לכול n זוג איקסים שקרובים עד כדי $1/n$ אבל ערכיהם רחוקים יותר מאפסילון. אזי קיבלנו שתי סדרות x_n, y_n הן חסומות בקטע ולכן לאחת יש תת"ס מתכנסת לגבול סופי מרציפות הגבול של ערכי התת"ס הוא הערך בגבול. משום ש x_n, y_n קרובות עד כדי $1/n$ מסנדרוויץ גם הסדרה השנייה מתכנסת לאותו הגבול ולכן ערכיה מתכנסים לאותו הגבול אבל זה סתירה לכך שערכיהן רחוקים עד כדי אפסילון מא"ש משולש.
12. עבור פונקציה רציפה ומונוטונית חזק מקטע פתוח וגזירה בנקודה כלשהי x_0 והנגזרת שם שונה מאפס אז הפונקציה הופכית גזירה ב $f(x_0)$ ומתקיים $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(x_0)))}$. הקיום של ההופכית ורציפותה והועבדה שהיא מונוטונית נובעים מהעובדה שתמונה רציפה של קטע היא קטע ושפונקציה רציפה ומונוטונית היא חח"ע. השוויון מתקבל מהגדרת הנגזרת להופכית ומשחק אלגברי והעובדה שההופכית גם כן רציפה.
13. משפט פרמה: הנגזרת בנקודות אקסטרמום מקומית שווה אפס. מוכיחים באמצעות העובדה שהנגזרות החד צדדיות שוות, ומשחק עם הסימן של המכנה והמונה כי הנקודה היא מינימום/ מקסימום ואז מקבלים שזה גדול שווה אפס וקטן שווה אפס ולכן שווה. (מוכיחים למקסימום גלובלי, אבל עבור מקסימום מקומי פשוט נצטמצם לקטע בו הוא מקסימום)
14. תהיינה f, g שתי פונקציות שמזדהות עד לסדר n בנקודה x_0 אז $f - g = o((x - x_0)^n)$ כלומר הגבול הנ"ל $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ מתקיים. הוכחה: מגדירים פונקציה חדשה שהיא ההפרש בין הפונקציות ולכן היא וכול הנגזרות שלה עד סדר n מתאפסות ב x_0 ובפרט היא גזירה n פעמים. באינדוקציה על n נראה שמתקיים הגבול הנדרש. צעד האינדוקציה הוא לבצע לגראנגז ואז מהנחת האינדוקציה מה שקבלנו קטן מאפסילון עבור דלתא מספיק קטן. נשים לב שהנקודה שמקיימת את לגראנגז אפילו קרובה יותר ל x_0 מהנקודה הנוכחית ולכן בפרט מקיימת הנדרש.
15. עבור פונקציה מקטע פתוח הגזירה בכולו $n+1$ פעמים ועבור נקודה מסוימת x_0 כול n הנגזרות הראשונות שלה מתאפסות אז לכול נקודה x בקטע קיימת נקודה c בינה לבין x_0 כך ש $f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$. הוכחה פשוט נובעת מביצוע לגראנגז שוב ושוב עד קבלת המבוקש. בכול צעד נשים לב שהנקודה שמקבלים עדיין נמצאת בקטע המבוקש.
16. אי אינו רציונלי. נשים לב שהשארית של אי מהטור שלו שואפת לאפס ולכן הוא שווה לטור טיילור שלו שהוא $e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ והשארית לפי לגראנגז $e - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = \frac{e^c}{(n+1)!}$. נניח בשלילה שאי רציונלי ולכן שווה למנת שני טבעיים $\frac{m}{n}$ אך גם שווה לטור שלו עד n ועוד השארית. נכפיל ב $n!$ את שני האגפים ונקבל שהשארית היא מספר שלם אבל ידוע כי e קטן משלוש ולכן אפשרי רק $n=1$ אבל בברור אי אינו שלם.