

גאומטריה של אוקלידס - פרק 8

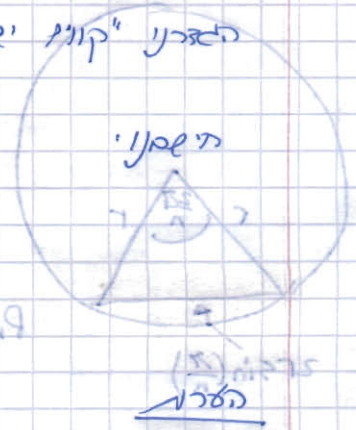
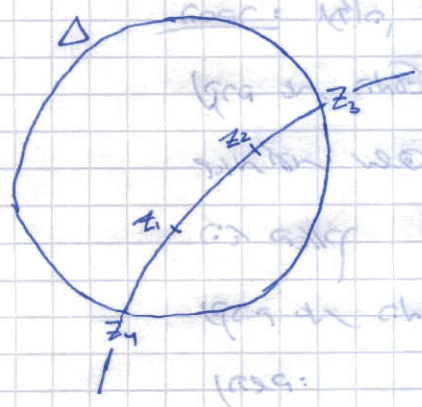
גאומטריה היפרבולית

בסיס קובץ זיכרון של ה-Poincaré disk model
הזכרון שלי
הזכרון "קונקרט" ישרי

$$\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$$

$$\rho_D(z_1, z_2) = \ln(D(z_1, z_2, z_3, z_4))$$

$$\rho_D(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$
$$t = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}$$



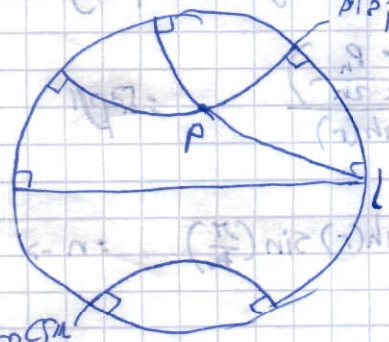
(1) גרסה #1 של גרסה 7) הגאומטריה "האלמנטרית", בלי (בלי) כל

העבר בלי קווי ישרים. ישרים אלו הם, למעשה, זוויות של 180

של z, w ונקודה (נקודה) לא אוקלידית אוקלידית

(2) מניאז לא גאומטריה אוקלידית, עבור ישר L ונקודה $p \notin L$, ישר

אוקלידס ישרים בקו p המקבילים ל- L . מקבילים



האין קשר קשר

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \alpha$$

$$R(\gamma) \sinh c = \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2}$$

(2) $\cosh$ הקוסינוס היפרבולי

$$\cos \alpha = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$$

(3) $\cosh$ הסינוס היפרבולי

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

האין סיבוב של $\cosh$ (הסינוס היפרבולי), שהוא אלמנטר וחסר
לכל שני ישרים קבועים קווי ישרים (למשל, גאומטריה, מודל זיכרון)

יש אצלנו שני סוגי היפרבולי, אחד צריך להיות קרוב ל-1
 ואחר שיהיה שווה ל-1. היפרבולי היחיד.

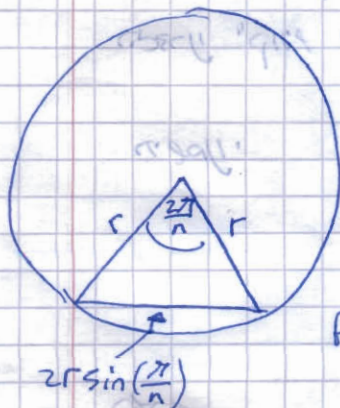
היפרבולי היחיד

היפרבולי היחיד

היפרבולי היחיד היפרבולי היפרבולי היפרבולי

$$2\pi \sinh(p)$$

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי



היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

היפרבולי

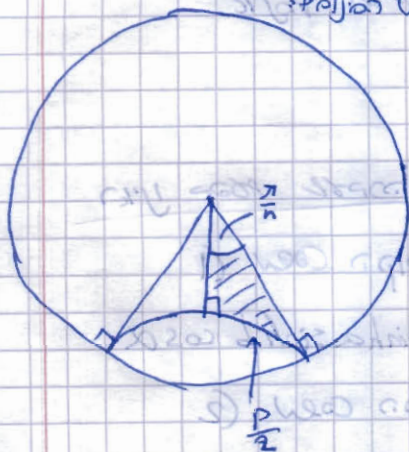
$$P_n = 2\pi r \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^3 + \dots \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi r$$

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{\pi}{n}\right) = f'(0)$$

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי



$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1} = \frac{\sinh\left(\frac{P_n}{2n}\right)}{\sinh(r)}$$

היפרבולי

$$n \sinh\left(\frac{P_n}{2n}\right) = n \sinh(r) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad : n \rightarrow \infty$$

$$\frac{P_n}{2} = \sinh(r) \pi$$

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

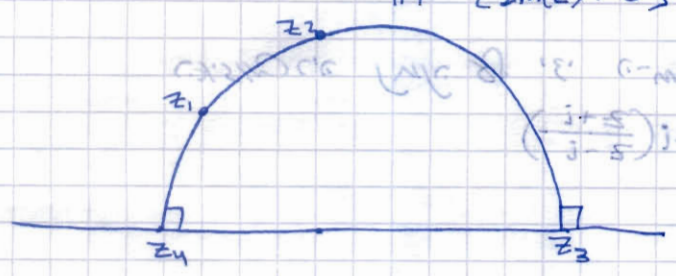
היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

היפרבולי היפרבולי היפרבולי היפרבולי

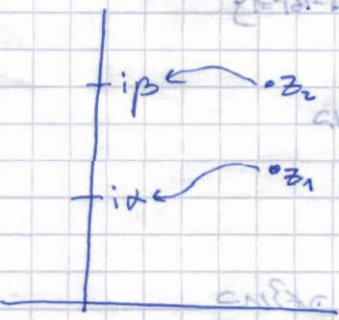
Poincaré Upper half plane - Coll 3/11

$$H = \{Im(z) > 0\}$$

$$d_H(z_1, z_2) = \ln(D(z_1, z_2, z_3, z_4))$$



$$\sinh \frac{d_H}{2}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{2\sqrt{Im z_1 Im z_2}}$$



$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

... $ix - ip$... z_1, z_2 ...

... $ix - ip$... z_1, z_2 ...

... $z \rightarrow \frac{1}{z}$... $z \rightarrow cz$... $z \rightarrow z + \alpha$... $\alpha \in \mathbb{R}$...

$$d_H(ix, ip) = \ln(D(ix, ip, \infty, 0)) = \ln \frac{(ix - \infty)(ip - 0)}{(ip - \infty)(ix - 0)} = \ln \left(\frac{p}{\alpha} \right)$$

$$\frac{|ix - ip|}{2\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{p - \alpha}{2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\sinh \frac{d_H}{2}(z_1, z_2) = \frac{e^{\frac{d_H}{2}} - e^{-\frac{d_H}{2}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{e^{\ln(\frac{p}{\alpha})}} - \frac{1}{\sqrt{e^{\ln(\frac{p}{\alpha})}}} \right] = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{p}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{p}} \right] = \frac{p - \alpha}{2\sqrt{\alpha\beta}}$$



הערה: $(H, d_H) \cong (\Delta, d_\Delta)$

כאשר המרחקים איננו זהים.

$C: \Delta \rightarrow H$

המאפיינים נתונים על ידי ה-Cayley transform

$C(z) = -i \left(\frac{z+i}{z-i} \right)$

$ISO^+(H) = PSL(2, R)$

הערה:

$ISO^+(\Delta) = PSU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \mid |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$

בנוסף, קבוצת המאפיינים הם (ולא רק אלו) אופייניים בין קבוצות

קבוצה זו, וקבוצה זו מובנית על ידי סביב מרכז.

בנוסף, ישנן המעבר למרחב המקבילים שני המרחב בין המרחב

כעת נבצע את ה-Cayley ונקבל את המרחב.

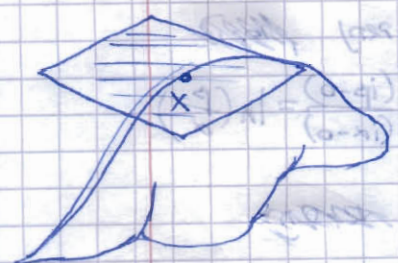
הוכחה שיש איזומורפיזם בין המרחב (בין המרחב והמרחב)

המרחב המרחב של קבוצה המרחב

המרחב המרחב של קבוצה המרחב, $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, Δ הוא המרחב המרחב

המרחב המרחב של קבוצה המרחב $x \in \Delta$ המרחב המרחב המרחב

המרחב המרחב



בנוסף, המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב

המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב

המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב

המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב

המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב המרחב

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1-x^2}}} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}}} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]$$

length (h) = (1x) 1 +

[illegible]

$$d_g(x, y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Handwritten: $\sqrt{10} \approx 3.16$

-e 70

also, 2nd silver plate

$$L(y') \leq L(y, z) + \varepsilon$$

100

$$\frac{(s y - s x) P}{s(s y - s x - 1)} =$$

בית מדרש גורן, אשדוד

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j$$

② (3)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

שנת הארץ ה'תשס"ו

$1/c$

:g per 3.75

$$ds^2 = (g) \begin{pmatrix} dx^2 \\ dy^2 \\ dz^2 \end{pmatrix}$$

הקו $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$ הוא קו עקום במישור המרוכב. $ds^2 = dx^2 + dy^2$

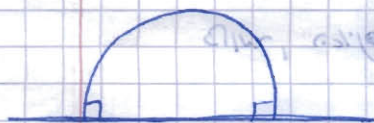
הקו γ הוא קו עקום במישור המרוכב.

הקו γ הוא קו עקום במישור המרוכב.

הקו γ הוא קו עקום במישור המרוכב.

$$H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \quad ds_H^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \textcircled{I}$$

$$\text{length}(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}{y(t)} dt$$



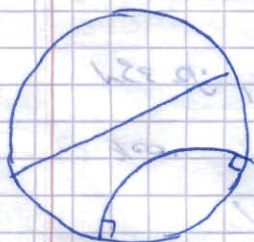
$$d(z_1, z_2) = \inf \text{length}(\gamma)$$

$$\sinh \frac{d_H}{2} = \frac{|z_1 - z_2|}{2\sqrt{\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}} \quad \textcircled{P/C}$$

הקו γ הוא קו עקום במישור המרוכב.

$$3 + (-5, 1) \cdot 6 = (-1, 1)$$

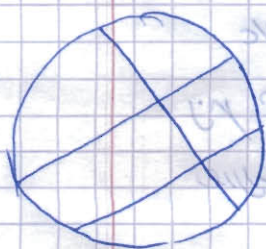
$$\Delta = \{z \mid |z| < 1\} \quad ds_\Delta^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad \textcircled{II}$$



$$\text{length}_\Delta(\gamma) = \int_a^b \frac{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{1 - x^2 - y^2} dt$$

הקו γ הוא קו עקום במישור המרוכב. (Klein model) $\textcircled{III}$

$$K = \{z \mid |z| < 1\} \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{x dx^2 + y dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

33 כה לא תסבך את עצמך בלשון חזק. (אברהם)
 ואלו הם הקצוות של המעשה, אך שיהיה שם חיים. מלבד קליין אין כזה קצוות,
 וברוך אין קצוות (אין שם צוה - הצוה המלאה) או אנו הצווה
 (האקטיוו) אך עדיין קרא, לו הישראל. (אברהם)
 ברא, עם ישראל היה מן הצווה (אברהם)
 נאמר בלשון חזק. ישראל היה מן הצווה (אברהם)

④ מ/נ ס' סרבלוא'א. (מלל מלל) מלל מלל מלל מלל

$$W^+ = \{P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid B(P, P) = -1, z > 0\}$$

$$B(p, p') := x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$(\oplus)^x, (\oplus)^y = (\oplus)^{\gamma}$$

$$d_W(u, v) = \cosh^{-1}(B(u, v))$$

מ' אב תשס"ג. עמס"ב. חתום: יצחק. אשתו: רחל. בן: יצחק.

הערה: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = i$ - ערך מציאותי

25/8, חתן, שבת שלום.

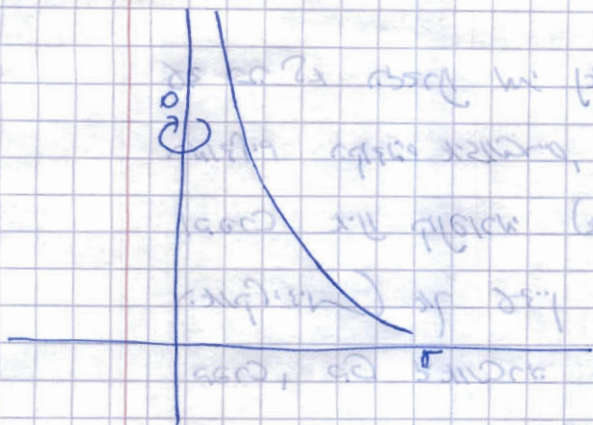
צדק נוספת היא חלף סריא ארם מחולק הצדק. פיל מחקרת הליונה
א הביטחולואי הגמתי צדק הצדק א הביטחולואי הליונה

ראו ציור כי באמצעות חלפה זו נקרא

פ.ב.נ. (פ.ב.נ.)

המחיר של המינימום הוא 100 ש"ח.

ו"חן ונצח א כן עקרא חן הקורב.



The pseudo-sphere ⑦
(Tractroid)

$$r = \frac{1}{\cosh t}, \quad z = t - \tanh(t)$$

$$(0 \leq t \leq \infty)$$

⑦ המשפט (Theorem) d_H is a metric on $\mathbb{H}$.

הוכחה: $\{0, 1, \dots, \infty\}$ is a metric on $\mathbb{H}$.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$$

$$f(t) = (x(t), y(t))$$

הוכחה: f is a "curve" in $\mathbb{H}$.
Let γ be a curve in $\mathbb{H}$ starting at a and ending at b .
The length of γ is defined as $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} / y$.

$$\text{length}(f) = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} dt \geq \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{2y(a)^2} dt = \frac{d_{\text{Eucl}}(a, b)}{2y(a)^2}$$

Thus, the length of f is at least $d_{\text{Eucl}}(a, b) / (2y(a)^2)$.

Therefore, $d_H(a, b) \leq d_{\text{Eucl}}(a, b) / (2y(a)^2)$.

Conversely, let γ be a curve in $\mathbb{H}$ starting at a and ending at b .

Then, $d_H(a, b) \leq L(\gamma)$.

Let γ be a curve in $\mathbb{H}$ starting at a and ending at b .
Then, $d_H(a, b) \leq L(\gamma)$.

Conversely, let γ be a curve in $\mathbb{H}$ starting at a and ending at b .
Then, $d_H(a, b) \leq L(\gamma)$.

Thus, $d_H(a, b) = \inf L(\gamma)$.

Therefore, d_H is a metric on $\mathbb{H}$.

Q.E.D.

Thus, d_H is a metric on $\mathbb{H}$.

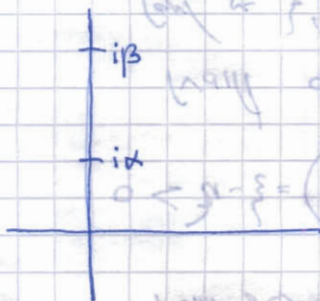
Q.E.D.

הצגה: $\mathbb{H}$ הוא המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

הצגה: "קוקס" הוא המרחב $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$ - מרחב המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

הצגה: קוקס הוא המרחב $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$ - מרחב המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

$$d_{\mathbb{H}}(ix, ip) = \ln \frac{\beta}{\alpha}$$



$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{1}{y(t)} \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) \equiv 0$$

הצגה: $\mathbb{H}$ הוא המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$ - מרחב המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

הצגה: $\mathbb{H}$ הוא המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$ - מרחב המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

הצגה: $\mathbb{H}$ הוא המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$ - מרחב המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$ab - cd = 1$$

$$PSL(2, \mathbb{R}) \ni T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w$$

הצגה:

$$\text{Im } w = \frac{\text{Im } z}{|cz+d|^2} \quad (1)$$

$$dw = \frac{dz}{(cz+d)^2}$$

הצגה: $\mathbb{H}$ הוא המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$ - מרחב המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

$$L_{hyp}(T(\gamma)) = \int \frac{|dw|}{\text{Im } w} = \int \frac{|dz|}{\text{Im } z} = L_{hyp}(\gamma)$$

הצגה: $\mathbb{H}$ הוא המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$ - מרחב המרחב הימני $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ על $\mathbb{H}$.

מקו"ם זה נמצא בתוך $\mathbb{R}^n$ - כלומר $\mathbb{R}^n$ הוא המרחב האוקלידי.

• $\text{repn } \sqrt{p}$ at $\eta, \eta \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

הפונקציה $T(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z - \eta}$ היא פונקציה

$$T(z) = 0$$

$$\begin{aligned} T(\xi) &= 0 \\ T(\eta) &= \infty \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -\xi \\ 1 & -\eta \end{pmatrix} = \xi - \eta > 0$$

מכיוון שהפרק נגמר, נשאלת השאלה: מה יהיה?

$0, T(P), T(Q)$ הם מסלולי γ (הם מסלולי הרכיבים γ_P ו- γ_Q). מכיון ש

אם יש לי שאלה אכתוב אותה בפרט

הזווית α היא $\frac{\pi}{2}$

אני רוצה להודות, תודה רבה



(#7) Find the value of $\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

1) $\text{Iso}^+(\text{H})$ פוליגון סגור סדור, כל זווית פנימית שווה $\pi/3$ בהכרח שווה.

$$P, P', Q, Q' \in H$$

$$d_H(P, P') = d_H(Q, Q')$$

$$\Rightarrow \exists f \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}), \begin{matrix} f(p) = q \\ f(p') = q' \end{matrix}$$

$$Q = i$$

$$Q' = i \cdot e^{d_H(p, p')}$$

[illegible]

אשר בן נח ואלה שמותם נח ושמר ויפא ויחזקאל ויחזקאל ויחזקאל

377 P, P' וצדדים $AB, A'B'$ (כאשר T הוא נקודת המפגש).

$$(x)_{\text{gen}} = \frac{1}{5.12} \cdot \frac{S_2(z) = \frac{z}{a}}{1 + 5.12 \cdot \frac{z}{a}} \quad S_2 = \frac{1}{100} \cdot ((g)T)$$

ניתן לבחור a כך ש- $S_2 \circ S_1(p) = i$ (אם S_1 היא סיבוב סביב p ו- S_2 היא סיבוב סביב q)

ולבחר a כך שנקודת האינטרס היא i .

כעת צריך להראות כי יש את האפשרות: או $S_2 \circ S_1(p) = q'$ או $S_2 \circ S_1(p) = q$.

להבדיל "שני" סוגי הנקודות: $S_2(z) = \frac{1}{z}$ ואם נקודת האינטרס היא i .

האפשרות הנוכחית היא ניתוח להפוך את ההוכחה:

$$Iso^+(H) = PSL(2, \mathbb{R})$$

כבר ידוע כי $PSL(2, \mathbb{R})$ הוא קבוצת הסיבובים.

הוכחה:

$$T \in Iso^+(H)$$

להוכיח כי קיימת נקודה T של $PSL(2, \mathbb{R})$ וניתן לייצג T כ-

הקומפוזיציה של נקודות של הזרועות. היותן של נקודות ip, iq , נקודות

$$T(ip) \rightarrow iq \text{ ו- } T(iq) \rightarrow ip$$

$$p = iq, \quad p' = ip$$

$$\tilde{T}(p)$$

$$d_H(p, q) = d_H(p, \tilde{T}(q)) \text{ - מכיוון ש-}$$

$$\tilde{T}(q) \text{ נמצאת על המרחק בדיוק}$$

$$d_H(p, q) \text{ שמתקבל ב-}$$

$$Q \equiv \tilde{T}(Q)$$

$$Q \equiv \tilde{T}(Q)$$

$$T \in Iso^+(H), \text{ בואו נבחר אותה כזו, ונסיק כי מתקבל}$$

$$Q \equiv \tilde{T}(Q)$$

$$T \in Iso^+(H)$$

$$T = Id \text{ (כל הנקודות הן אותיות)}$$

$$T \in Iso^+(H)$$

