

①

גיאומטריה לא אוקלידית סימור #4

בפרק סצורה זו ברנו על גיאומטריה ספירית. ברט, האילן:
 $\Delta ABC = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)(R^2)$ אסי $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ①



② משפט הקוסינוסים הספירי: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

(עם הרדיוס ה-1 הספירה $\neq 1$ בדרך כלל את האות α במקום a בקו הכוונה).

③ ~~משפט הסינוסים הספירי~~ מסקנה מהמשפט הקוסינוסים: $a \leq b + c$
 על א סימון השטח (S, θ) נגזר ההיגוך בין 2 נק לא
 אלו בדיוק החדר היות איך הקטן הקצה החדר אונק.
 (הקבים מהל גיאומטרי דגם (S, θ))

④ משפט פיגורס הספירי: $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos a = \cos b \cos c$

⑤ מסקנה (וספר מהמשפט הקוסינוסים הספירי): אן איזולט היה מקוונת
 בין R^2 ו S^2 (ואם a בין $S^2(R_1)$ ו $S^2(R_2)$, $R_1 \neq R_2$ גרדיל).

⑥ משפט הסינוסים הספירי (31 גרדיל * 4): $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$

⑦ גרדיל אכל גרדיל * 3 משולש ספירי ABC בנקן
 משולש בואי A'B'C' במקביל הכא:

$$\begin{aligned} OA' &\perp OB' \\ OA' &\perp OC' \\ \langle OA, OA' \rangle &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^x &= B \times C / \|B \times C\| \\ B^x &= C \times A / \|C \times A\| \\ C^x &= A \times B / \|A \times B\| \end{aligned}$$

זה נעזק 2 אנדרצות
 בועקים את הקחכה
 ונדה

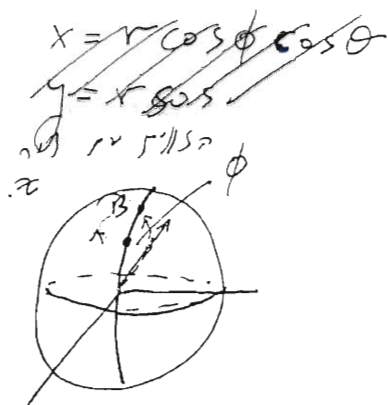
⑧ האילן ברצם סצורה איך בזכית הנוסחה אטל א מאלס טריו
 ניתן אברוז את נוסטאון אולר $V - E + F = 2$ עכור פוליגונים.

2

אינטואיציה ספירית (המשק)

לעיתים פסיאונצ'ים על S^2 (מטלות הקצרים ביותר) הם מרחקים גלובליים.

הערה וזכרון > מרחב קורדינטות ספיריות



$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$0 \leq \theta, \phi \leq \pi$

ונגזרת z וק A, B
 כך שהמרחק הקצר ביותר
 עובר דרך z

נקודת המפגש של הסדרה ג'וניק
 $\sigma: [0, 1] \rightarrow S^2$
 $\sigma(0) = A \quad \sigma(1) = B$

$$\text{length}(\sigma) = \int_0^1 \|\dot{\sigma}\| dt = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\text{length}(\sigma) = \int_0^1 \sqrt{[\phi'(t)]^2 + \sin^2(\phi(t))[\theta'(t)]^2} dt$$

$$\geq \int_0^1 \sqrt{[\phi'(t)]^2} dt = |\phi(1) - \phi(0)|$$

אורך הקשת (הישר הקצר ביותר בין הנקודות)

Const = $\theta(t)$ $\Leftrightarrow \theta'(t) = 0$ המסלול הוא קשת מעגלית
 + המרחק הקצר ביותר שיש בין הנקודות הוא המרחק הגלובלי.

מסקנה (אחרת) או מהעצמה שלו ברגע מסוים

(אם σ הוא מסלול קצר ביותר) $\Rightarrow d(A, B) = \arccos(A \cdot B)$

$(\cos \phi = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|})$ the angle between A & B

④ ארץ קוביות 2 נק' קטנו ספיריקלי. ספיריקלי.

④ ארץ קוביות נק' ארץ (ספיריקלי קטנו ספיריקלי).
 $f = \text{Ref}_1 \circ \text{Ref}_2 =$ בויטטיים ארץ ספיריקליים (הם זאכיים בייטטיים)

ספיריקלי

הצגה: (נתן ארסדאט בויטטי) ספיריקלי ספיריקלי $\mathbb{R}^3$
 כל ספיריקלי ספיריקלי ונתון ארסדאט ארץ ספיריקלי ונתון ספיריקלי
 ארסדאט, ארץ בויטטיים ארץ ספיריקלי: (נתן ארץ)

ספיריקלי ארץ ספיריקלי $\mathbb{R}^n$ ספיריקלי ארץ ספיריקלי ונתון
 ארץ ספיריקלי t -וואר ספיריקליים.

④ ארץ ספיריקלי ארץ ספיריקלי.

(ספיריקלי ספיריקלי $A \in O(3)$ ונתון ספיריקלי ספיריקלי
 ארץ ספיריקליים ספיריקליים A $\det(I-A) = 0$. ספיריקלי ספיריקלי
 ספיריקלי 3 ספיריקליים ספיריקליים ספיריקליים
 $\exists v \in \mathbb{R}^3 \quad Av = \lambda v \quad \lambda = \pm 1$

ארץ ספיריקליים $\lambda = \pm 1$ (ספיריקליים ספיריקליים)

ארץ $\lambda = 1$ (ספיריקליים ספיריקליים) ארץ ספיריקליים

בויטטיים נק' $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot v = 0\}$ ספיריקליים
 $f(H) = H$ ספיריקליים ספיריקליים

ספיריקליים ספיריקליים ספיריקליים ספיריקליים.

הצגה: ספיריקליים ספיריקליים ספיריקליים ספיריקליים...

Holonomy Transport

(א) סדרה δ_{AB} סיבוב השטחיה אל
השטח העצום הנכיל אל A, B "דבר"
(ניסוח נחר מדיק עובר $\checkmark \{ \}$)
נמצאה ונת A $\checkmark$ B .
גובה $\delta = \delta_{CA} \cdot \delta_{BC} \cdot \delta_{AB}$ זה סיבוב הקובץ.
נתת קראר V חלק A המינק / אשר AB

BC (אבות) $\delta_{AB}(V)$ - הנקודה הסה ישרי π - β PR הישר

(זהו המצב בו הנשק לא הפעיל "ההכין")

$$\beta + \gamma - 2\pi \quad \text{---} \quad \beta \quad \delta_{BC} \circ \delta_{AB} (V) \quad \text{---} \quad \beta \quad \gamma$$
$$Y_T(V) = Y_{CA} \circ Y_{DC} \circ Y_{AB}(V) \quad l_0 > 11 \quad AB \quad \text{with } \sigma$$
$$\text{Area}(S) = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \alpha + \beta + \gamma - 3\pi \quad \text{für } S \supset \text{Kreis}$$

ק/אמדת ϵ δ סיוכום (צל יעלה - 1) וסיוכום קוטר
אם $A, A - A$ וסיוכום סיוכום סיוכום סיוכום $\mu(T)$

$\gamma_P = \gamma_{A_n A_1} \circ \gamma_{A_{n-1} A_n}$

Area(p) $\sim 1/5 > -A \mid A_1$ $\sim 1/5 > 0$ $\sim 1/5$

הסקרה בתנן אלוהי א' הסדרה ניתן לקרוא אלוהי א'
באמצעות ההצגה
$$\gamma_Q = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{p_i}$$

The effect of holonomy transport around the loop is

אנחנו נשתמש בגורם הזה על מנת להקלות

היא תבונה פשוטה (אונקלס דע תבונה וורמאטע אט באיאמאק)

57. $\text{Trans}(\mathbb{R}^n) \triangleleft \text{Iso}^+(\mathbb{R}^n)$ פועל חופשי וטרנסיוזיטיבי

$(f = Ax + v \text{ נור } f \rightarrow A \text{ נור } f) \text{ נור } f \rightarrow A \text{ נור } f$

(מספרים של $I_{50}^+(m)$)

⑤

(הנה) סדין
הר

התבונה G תיבנה ככזו: R_α יר-115 α

(קדש יו שח הוק המלכותיאה סהית קדש + סליח הס'ס'ס)

התחבורה $SO(3)$ היא $SO(3)$ על $\mathbb{R}^3$ עם $\mathbb{R}^3$ כמרחב טנגנטי

פיראן מקביל צו צייט צו α דעם פארם פארן פארם פארן

הצגה: סביב α שקובץ $\mu, \rho, -\rho$ זה כמו μ ואלוק μ זה μ



הנחת ג' היא $\alpha = \pi$ והבונן $> 2 - \pi$ וסוף כל הבהרה.

$G \geq \frac{1}{18} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{9}$

המשפט של פאלי-וויינברג

$T_A = \text{הטמפרטורה} = 10^\circ\text{C}$

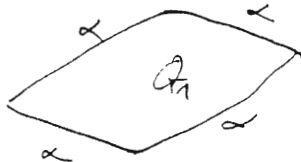
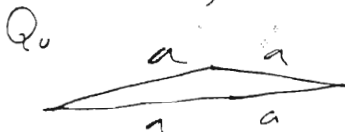


~~6. $G \geq 0$ if $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ such that $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x| < \delta \Rightarrow |G(x)| < \epsilon$~~

ה'תשנ"ב - ח' שבט

$$(2\beta + \alpha - \pi = 2\beta \quad \text{if } \beta \geq \pi/2 \quad T_0) \quad C = \{0, 1\} \quad \text{if } \beta \leq \pi/2$$

המשפט: אם $\alpha < \pi$ וקבוצת המסלולים S^1 של α היא קטע פתוח, אז α הוא גנרליזציה של מסלול סגור.



ההצעה/אופן הקיום

בית שמש

פא-אמערעאניזם איז א

$\text{Ann}(Q_1) > 0 \quad \hookrightarrow \quad G_1 = Q \quad \hookrightarrow \quad \dots$

22/07/00 AD $Q_0 = -1$

$$\text{Aut}(Q) \cong \langle 15 \rangle \cong \langle 10' \rangle \quad T_Q \in G \Leftarrow$$

$\beta \approx 0$ וולטג'ים סיבובים דומות אלוהי קלאסיקה מודרני

מחבר: הרב יצחק אייזיק ווארשקער

167 מסכת ג' וט"ז = ד' וט"ז וס"ח / ט"ז הי"ח ח"ד



8) מציג נציגות ניקן / אדלר של הקווארטים. הצגת מרחב 2×2 המכונה באק הדיא

$$A: \mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$$

$$q = a + bi + cj + dk$$

$$q = \alpha + \beta j$$

$$\begin{cases} \alpha = a + bi \\ \beta = c + di \end{cases}$$

$$A(q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\det A(q) = |q|^2$$

$(su(2))$ נציגות $su(2)$ והצגות אחרות

טור $A(q_1, q_2) = A(q_1) \cdot A(q_2)$ (הצגות $su(2)$ מהותיות) check! (check!) check!

$$A(q) = a A(1) + b A(i) + c A(j) + d A(k)$$

אופן מסביב לבנין של המטריצות הבסיס $\{1, i, j, k\}$ הצגות אדלר

$$q=i \quad A(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$q=j \quad A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q=k \quad A(k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Pauli Matrices

$$|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|$$

אנחנו רוצים להראות כי $A(q_1 q_2) = A(q_1) A(q_2)$

הוכחה I

$$A(\bar{q}) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} = \overline{A(q)}^t$$

$$\begin{cases} \alpha(\bar{q}) = \bar{\alpha} \\ \beta(\bar{q}) = \bar{\beta} \end{cases}$$

הוכחה II: $\overline{q_2 q_1} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$ (אם q הוא קווארטיון - יש תמיד $\bar{q}$)

$$A(\overline{q_1 q_2}) = \overline{A(q_1 q_2)}^t = \overline{A(q_1) A(q_2)}^t = \overline{A(q_2)}^t \overline{A(q_1)}^t$$

$$A(\overline{q_1 q_2}) = A(\bar{q}_2 \bar{q}_1) = A(\bar{q}_2) A(\bar{q}_1) = A(q_2) A(q_1)$$

מסקנה: H זה שדה קוואטני



הצגה III: אם $q \in H, q \neq 0$ אזי קיים ויחיד $\bar{q} \in H$ כך ש $q\bar{q} = \bar{q}q = 1$

קיים: $\bar{q} = \frac{2}{|q|^2}$ יחידה (הדדל) סלברט.

מה הקשר בין קוואטניים ל $SO(3)$?

שאלה 2 אובייקטים:

$$H_1 = \{q \in H \mid |q| = 1\} \quad (\text{אזכור: } |q_1 q_2| = |q_1| |q_2|)$$

H_1 שדה חבורה (אנטי-איזומורפיזם H אנטי-איזומורפיזם + הנוכח)

אילו הנוכח חבורה H_1 נגזרת $|q| = 1$ $\Rightarrow |\bar{q}| = \frac{1}{|q|} = 1$

$$H_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \cong S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

מסקנה (מלבד לא סטנדרט) $\sqrt{S^3}$ יש מבנה חבורה

למטה נקרא S^0, S^1, S^2, S^3 יש מבנה חבורה (המקרה) S^7 שם לא חבורה סטנדרטית נוסף S^0 יש מבנה חבורה S^7 (חבורה חבורה זה מאלקטרוניק)

$$H_0 = \{x \in H \mid \bar{x} = -x\}$$

האובייקט הבטל של H_0 :

$$= \{x = bi + cj + dk\} \cong \mathbb{R}^3 \quad \text{pure quat.}$$

$\cong \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ זה מבנה ערכי וזמן קובל (ניקל) $\mathbb{R}^3$ מבנה אנליטי (זה סדר בקבוצה)

⑤

$$\alpha_2: H_0 \rightarrow H_0$$

$$\alpha_g(x) = g x g^{-1}$$

(

$$\det A_L = +1 \quad (3)$$

$$\alpha_2 \in SO(3)$$

$$SO(H_0)$$

דערסטרעכע רעדאע

)

$$\alpha_g(x) = g \cdot x \cdot g^{-1} \in H_0$$

$$\overline{X} = -X \quad \text{if } X \in H_0$$

אם $g \in H_2$ אז $g \in H_1$

$$\overline{\alpha_g(x)} = \overline{g \cdot g^{-1}} = \overline{g^{-1}} \cdot \overline{x} \cdot \overline{g} = \overline{g^{-1}}(-x)\overline{g} = \overline{g(-x)}\overline{g^{-1}} = -\alpha_g(x)$$

$$\left(\bar{z}^{-1} = \frac{\bar{z}}{\|\bar{z}\|} = \bar{z} \text{ for } \|\bar{z}\|=1 \right) \Rightarrow \bar{z}^{-1} = \bar{z} \quad \text{for } z \in H_1$$

(2)

$$|\alpha_g(x)| = |g \times \bar{g}^{-1}| = |g| |x| |\bar{g}^{-1}| = |x| \quad (g \in H_1)$$

(3)

$$\varphi: H_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c(q) = \det \alpha_2$$

5³ קטורה מס' 47 (נס"ר)

(

$\alpha_{g_0} = 1$ $\mu_{311} > 50$ $\rho_0 = 1$ μ_{21}

$$\varphi(1) = \det \mathbb{1} = +1 \quad \Leftarrow$$

$\gamma(t) \#_1 \gamma = \gamma$ for any $\gamma \in \#_1$ and $\gamma \in \#_1$

$$X(1) = 9$$

9. $\sqrt{90}$ 4 7 5 4 7 5

$$Y(0) = 90$$

(12) $\mathcal{H} \cong \mathbb{H}_0$ טענה: $\psi(q)$ איז אן איזאמאריזם

$q^\perp = \{x \in \mathbb{H}_0 \mid \langle x, q \rangle = 0\}$ טענה

$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2} (|a+b|^2 - |a|^2 - |b|^2) = \frac{1}{2} (a\bar{b} + b\bar{a})$ הערה

$q^\perp = \{x \in \mathbb{H}_0 \mid \langle x, q \rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{H}_0 \mid \bar{x}q + \bar{q}x = 0\}$
 $\left(\begin{array}{l} \bar{q} = \bar{q}^{-1} = -q \\ q \in \mathbb{H}, q \neq 0 \end{array} \right) = \{x \in \mathbb{H}_0 \mid xq + qx = 0\}$
 $\bar{x} = -x \quad x \in \mathbb{H}_0$

$\boxed{\psi(q)(x) = -q x \bar{q}^{-1} = x q \bar{q}^{-1} = x}$ טענה $x \in q^\perp$

בנוסף: $(\beta \in \mathbb{R}) \quad x = \beta q$
 $\psi(q)(x) = -q(\beta q)\bar{q}^{-1} = -q\beta = -\beta q$
מסקנה: $\psi(q)$ איז אן איזאמאריזם

סיכום: ψ איז אן איזאמאריזם

$A = S_{p_1} \circ S_{p_2}$ טענה: $A \in SO(3)$ $\iff$ $A = \psi(q_1) \circ \psi(q_2)$
 $S_{p_2} = \psi(q_2), S_{p_1} = \psi(q_1)$
 $A = \psi(q_1) \circ \psi(q_2)$

$A(x) = \psi(q_1)(\psi(q_2)(x)) = q_1 q_2 x q_2^{-1} q_1^{-1} = \alpha_{q_1, q_2}(x)$

13) $\alpha: \mathbb{H}_1 \longrightarrow SO(3) \cong SO(\mathbb{H}_0)$ is an isom

$$\alpha(q_1 q_2^{-1}) = \alpha(q_1) \alpha(q_2)^{-1} \in \mathbb{I} \iff \alpha(q_1) = \alpha(q_2) \iff \alpha(1)$$

$$q_1, q_2^{-1} \in K \iff \alpha \in$$

proof $\rightarrow$ pick an element $\alpha \in \mathbb{I}$ then $\alpha = \{+1, -1\}$ is an isom

is $\rightarrow$ pick an element q is an isom

$$\forall x \in \mathbb{H}_0 \quad q x q^{-1} = x \iff \alpha_q(x) = x \iff$$

$$\forall x \in \mathbb{H} \quad qx = xq \iff$$

$$q = a + bi + cj + dk$$

$$b = c = d = 0 \iff x = j \quad \text{is an isom}$$

$$c = 0 \iff x = i \quad \text{is an isom}$$

$$q = a \quad \text{is an isom}$$

is an isom $a = \pm 1$ is an isom $|q| = 1$ is an isom

$$\left(\begin{array}{l} \alpha(q_1) = \alpha(q_2) \quad \text{is an isom} \\ q_1 = \pm q_2 \quad \text{is an isom} \end{array} \right)$$

$$SO(3) \cong \mathbb{S}^3 / \{1, -1\} \iff$$

homeomorphic
(in fact
diffeomorphic
(not easy))

$$\mathbb{RP}^3$$