8.3.11

גיאומטריה לא אוקלידית - שיעור 3

משפט: הגבלת קריסטלוגרפית

יהי $L \subset \mathbb{R}^2$ רשת (סריג),

ונסמן $S(L)=\{g\in Iso(\mathbb{R}^2) \mid g(L)=L\}$.

אם $g\in S(L)$, אזי קיים $m\in\{2,3,4,6\}$ כך ש- $g^m=Id$.

במילים, g סיבוב בזווית $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$.

הוכחה אלגברית

(I) נתחיל במקרה פרטי: $L=\mathbb{Z}^2$.

נסמן $g(x)=Ax+b$ וכן $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$.

נשים לב: $g(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}^2$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in\mathbb{Z}^2.\ Ax+b\in\mathbb{Z}^2$$

נראה כי עובדה זו מכריחה את איברי המטריצה A להיות שלמים.

נסמן $x=\binom{m_1}{m_2}$. נפתח את G ונקבל:

$$a_{11}m_1+a_{12}m_2+b_1\in\mathbb{Z}$$
$$a_{21}m_1+a_{22}m_2+b\in\mathbb{Z}$$

כעת נוכל לבחור את m_1,m_2 כרצוננו (כי זה נכון לכל x). לדוגמא, כדי להוכיח ש- a_{11} שלם, נשתמש לדוגמא במספרים הבאים:

$m_1=1,\ m_2=0$: $\begin{cases} a_{11}+b\in\mathbb{Z} \\ a_{21}+b\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$m_1=2,\ m_2=0$: $\begin{cases} 2a_{11}+b\in\mathbb{Z} \\ 2a_{21}+b\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$\Rightarrow a_{11}\in\mathbb{Z}$

בדומה אפשר להראות גם על שאר איברי המטריצה.

מסקנה: $trA\in\mathbb{Z}$

(II) מקרה כללי: $L\subset\mathbb{R}^2$ סריג כלשהו.

נסמן $L=sp_{\mathbb{Z}}\{\eta,\xi\}$

נקח טרנס' לינארית שמעבירה את L ל-$\mathbb{Z}^2$.

$$\exists f\in GL_2(\mathbb{Z}) .\ f(L)=\mathbb{Z}^2$$

זו איננה איזומטריה אלא רק שינוי בסיס.

כעת:

$$g(L)=L \Rightarrow (f\circ g\circ f^{-1})(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}^2$$

לכן $tr(f\circ g\circ f^{-1})\in\mathbb{Z}$, אך מכיוון ש-trace אינווריאנטי להצמדה (אנחנו יודעים מאלגברה לינארית) לכן $tr(g)\in\mathbb{Z}$.

מכיוון ש-g היא סיבוב אנחנו יודעים כי $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

אך ממה שהוכחנו הרגע אנחנו מקבלים ש- $2\cos\theta\in\mathbb{Z}$.

לכן $\cos\theta\in\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$.

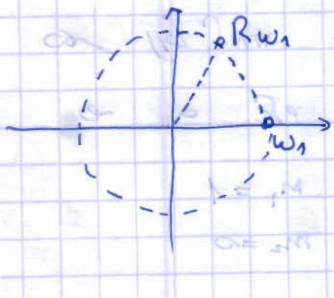
קל לראות כי G את מהצורות שכתבנו מתאימה לאחד המקרים הנ"ל.

הוכחה גאומטרית

כרגע, נשכח את הפרטים ונתאר את רעיון ההוכחה.

סקיצה: ניקח $0\neq w\in L$ בעל אורך מינימלי (קיים כזה כי זה סריג).

נצייר מעגל ברדיוס w_1



מכיוון ש-g ציקלית קיים סיבוב עם זווית מינימלית מסדר סופי. נסמנו ב- R.

כעת נתבונן ב- Rw_1-w_1. מכיוון שהאורך שלו לפחות $|w_1|$ נקבל שזווית הסיבוב היא לפחות $\theta\geq\frac{\pi}{3}$.

מכך ניתן להסיק כי $m\in\{2,3,4,5,6\}$. כעת נותר להוכיח שלא ייתכן כי $m=5$.

אם ניקח $m=5$ נראה כי $R^2w_1+w_1$ קטן יותר מהאורך של w_1 וזו סתירה.

לפני שנעזוב את הגיאומטריה האוקלידית (כפי שעם הקורס דורש מאיתנו לעשות), נאמר דבר אחד נוסף על הקשר בין חבורות דיסקרטיות של איזומטריות של מרחב אוקלידי לבין משטחים.

תהי $G < Is_o(\mathbb{R}^2)$ דיסקרטית. נגדיר יחס שקילות $x \sim y$ אם $x \in Gy$. נסמן ב- $\mathbb{R}^2/_\sim$. מבנה זה הוא מעניין מבחינה טופולוגית. ננסה להבין אותו.

<u>תזכורת:</u> פוליגון ב- $\mathbb{R}^2$ זה חיתוך סופי של חצאי מישורים כך שפנים לא ריק.

<u>הגדרה:</u> נאמר ש $P \subset \mathbb{R}^2$ הוא פוליגון יסודי של החבורה G (G תת חבורה דיסקרטית של איזומטריות) אם:

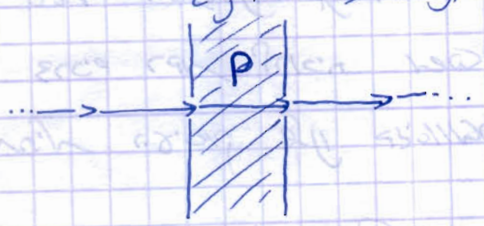
א) $g(P) \cap P = \emptyset$ או
$g(P) \cap P$ הוא קודקוד משותף או
$g(P) \cap P$ הוא צלע משותפת
לכל $g \in G$

ב) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in G} gP$

<u>דוגמאות (ללא הוכחה)</u>

א) <u>הזזה.</u> נגדיר $g(x) = x + \vec{a}$, ונגדיר $G = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$

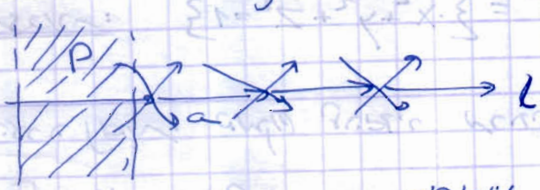
פוליגון יסודי:



במקרה זה, $\mathbb{R}^2/_\sim$ יהיה צילינדר אינסופי שהיקפו $\vec{a}$.

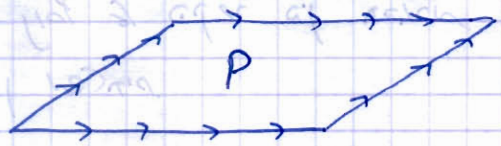
ב) <u>גליסה.</u> נגדיר $g(x) = S_L x + \vec{a}$, $a \parallel L$, $G = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

פוליגון יסודי:



אז $\mathbb{R}^2/_\sim$ יהיה רצועת מוביוס אינסופית.

⑥ רשת G נוצרת ע"י שתי הזזות כנ"ל.



כעת $\mathbb{R}^2/_{\sim}$ הוא טורוס. 

③ <u>תרגיל:</u> למצוא G כך ש- $\mathbb{R}^2/_{G} \cong$ בקבוק קליין.

<u>הערה (נוכח ההמשך)</u>: לא ניתן לקבל S^2 (ספירה)

וגם לא את זה: 

(להגדרה המדויקת: לא ניתן לקבל משהו עם חורים או ידיות)

אחת הסיבות לדבר מגאומטריה אוקלידית היא כי הטופולוגיות שניתן לקבל בצורה זו מגאומטריה אוקלידית הן מאוד מוגבלות.

<u>נוסחת אוילר</u>

בשיעור שעבר השתמשנו בנוסחה: $V-E+F=2$.

ישנן דרכים רבות להוכיח משפט זה, אנחנו נשתמש בה כנק' הפתיחה של תחילת העיסוק שלנו בגאומטריה ספרית.

<u>גאומטריה ספרית</u>

אנחנו ננצל את העובדה שהספירה משוכנת בתוך $\mathbb{R}^3$, וננצל את הגאומטריה של $\mathbb{R}^3$ כדי להגדיר גאומטריה על S^2. אין צורך לעשות זאת, ניתן להגדיר באופן עצמאי, אך נתחיל באופן זה לשם נוחות.

<u>תזכורת:</u> $S^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}$.

הערה נוספת: במקום להגדיר מרחק, כפי שעשינו תחילה בפרק [illegible], נתחיל מלהגדיר שטח.

תזכורת: (X,d) מרחב מטרי אם:

1) $d(x,y)=0$ iff $x=y$

2) $d(x,y)=d(y,x)$

3) $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)$

לפעמים קורסים מגדירים כי $d(x,y)\ge 0$ אך הוא נובע כבר מ-① ו-③

הגדרה: $S^2(R)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$ (חשוב לשים לב להבדל בין R ל-$\mathbb{R}$)

תזכורת: $Area(S^2(R)) = 4\pi R^2$.

הגדרה: מעגל גדול - חיתוך בין S^2 לבין מישור העובר דרך הראשית.
(ניתן להגדיר לזה "משמעות פנימית" גם ללא $\mathbb{R}^3$. אנלוג לקו ישר).

הערה: דרך כל 2 נקודות לא אנטיפודיות (אנטיפודיות $=(\vec{x},-\vec{x})$) עובר מעגל גדול אחד.

נשים לב גם כי כל מעגל גדול חוצה את הספירה לשני חלקים שווים.

הגדרה: פוליגון ספרי - חיתוך של מס' סופי של חצאי ספירות בעל פנים לא ריק.

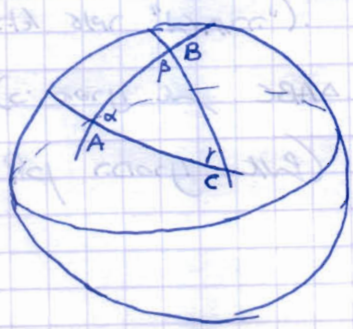
הגדרה: זווית בין שני מעגלים גדולים:

הגדרה א': הזווית בין שני המישורים המתאימים

הגדרה ב': הזווית בין שני הישרים המשיקים לכל אחד מהמעגלים בנקודת המפגש.

הגדרות אלה הן שקולות.

טענה: $Area(\triangle ABC) = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$



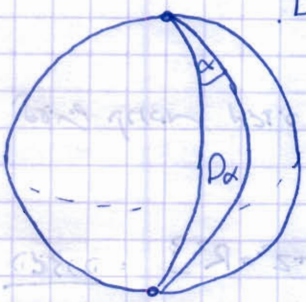
(תמיד נסמן נקודות באותיות לטיניות גדולות
וזוויות באותיות ~~יוונית~~ יווניות קטנות)
(וקטעים באותיות לטיניות קטנות)

<u>מסקנה:</u> סכום הזוויות במשולש ספרי $\geq \pi$.

<u>הוכחה</u>

<u>למה:</u> יהי 2-גון (פוליגון עם שני קודקודים) D_α.

$$Area(D_\alpha) = 2R^2\alpha$$

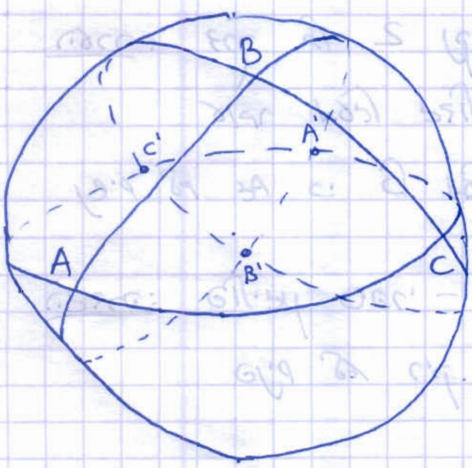


<u>הוכחת הלמה:</u>

① $\alpha = \frac{2\pi}{k},\ k\in\mathbb{N}$: נחלק את הספרה ל-k 2-גונים.

② $\alpha = 2\pi\cdot\frac{p}{q}$. נחלק את הדוגון (2-גון) ל-p דוגונים עם זווית $\frac{2\pi}{q}$ ונשתמש ב-①.

③ α אי-רציונלי: נקרב באמצעות $\alpha = \lim 2\pi\frac{p_i}{q_i}$ ונשתמש ב-②.



נשים לב:

$AA' \supseteq \triangle ABC$ (דוגון)

$BB' \supseteq \triangle ABC$ (דוגון)

$CC' \supseteq \triangle ABC$ (דוגון)

מכיוון שהספרה סימטרית אפשר להפוך אותה כך ש-AC יהיה "קו המשווה". כעת:

$$U = AA' \cup BB' \cup CC' - ABC - A'B'C'$$

כאשר U הוא השטח של חצי הספרה העליונה. שימו לב כי AA' הוא דוגון עם זווית α, BB' עם זווית β ו-CC' עם זווית γ.
חשוב לציין כי עבור AA' ו-CC' לוקחים את הדוגון שמכיל את $\triangle ABC$ ועבור BB' לוקחים את הדוגון <u>שלא</u> מכיל את $\triangle ABC$ (בציור הוא נראה כאילו הוא עובר "מאחורה"). לאחר שצבענו בציור השתכנענו שזה נכון (כי ספרנו את $\triangle ABC$ פעמיים, וספרנו את $\triangle A'B'C'$ שלא מחצי העליון לכן החסרנו אותם) נשאר חישוב שטחים.

מכיוון ש A ו- A' אנטיפודיים (מנוגדים), וכנ"ל לגבי B,B' ו- C,C' אזי:

$$Area(ABC) = Area(A'B'C').$$

ולכן קיבלנו ש-

$$2\pi R^2 = 2R^2\alpha + 2R^2\beta + 2R^2\gamma - 2\,Area(\triangle ABC)$$

<u>מסקנה:</u> יהי P פוליגון ספרי עם זוויות $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.
אזי:

$$Area(P) = R^2\left(\sum \alpha_i - (n-2)\pi\right)$$

<u>הוכחה:</u> תרגיל. (לחלק את P למשולשים).

נשתמש בנוסחה לשטח של פוליגון ספרי על מנת להוכיח את משפט אוילר:

$$V - E + F = 2.$$

<u>הוכחה:</u>

(I) הנוסחה $(V-E+F=2)$ לא תלויה ב"מגודל" הפוליטופ ולכן ניתן "לנפח" אותו עד שיכיל את S^2.

(II) נטיל את הפוליטופ על S^2, באופן הבא: $x \to \frac{x}{\|x\|}$.
(קיים ציור שמראה איך זה נראה. אם היתי יודע לצייר דברים כאלה כיד לא היתי איפה שאני נמצא היום).

(III) ההטלה של S^2 מחלקת את S^2 לפוליגונים ספריים $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_F$
(F מספר הפאות). צריך להשתכנע שזה נכון.

(IV) נסכום את סכום כל הזוויות (של כל הפוליגונים) בשתי דרכים שונות.

(א) על כל קודקוד, נעבור על כל 2π הסיבוב סביבו (כל זווית תהיה שייכת לפוליגון אחר). נקבל: $\sum_{i=1}^{F} \text{סכום הזוויות של } \Delta_i = 2\pi V$.

(ב) לפי ההוכחה הקודמת נקבל:

$$\sum_{i=1}^{F} \text{סכום הזוויות של } \Delta_i = \sum_{i=1}^{F}\left(Area(\Delta_i) + (\underbrace{V_i}_{\text{מס' הקודקודים בפוליגון } \Delta_i} - 2)\pi\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{F} Area(\Delta_i) + \pi\sum_{i=1}^{F} V_i - 2\pi F$$

נשים לב שמתקיים $\sum_{i=1}^{F} v_i = 2E$.

כעת נשווה בין שני הערכים ונקבל:

$$2\pi V = 4\pi + 2\pi E - 2\pi F$$

וזה כמובן אומר את משפט אוילר.

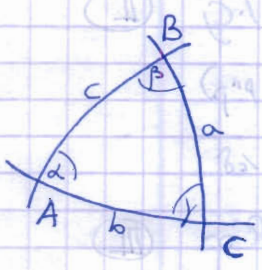
נחזור להגדרת גאומטריה ספרית, ונגדיר מרחק.

<u>הגדרה:</u> מרחק בין 2 נק' לא אנטיפודיות ב-S^2 זה אורך הקשת הקצרה של המעגל הגדול דרכן. (לנק' אנטיפודיות נגדיר $d(v,-v)=\pi R$.

הגדרה זו היא בעצם המרחק המושרה מ-$\mathbb{R}^3$.

נשים לב כי קל להוכיח את שני התנאים הראשונים של מרחק, אך לא את אי שוויון המשולש.

<u>טענה:</u> (S^2,d) זה מרחק מטרי (הוכחת אי שוויון המשולש)



<u>למה:</u> משפט הקוסינוס הספרי:

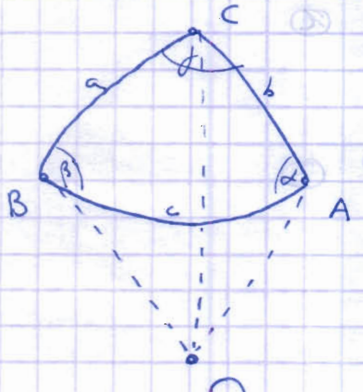
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

(בשיעורי בית, נוכיח משפט דומה)

לפני שנוכיח את הלמה נסביר את המוטיבציה:

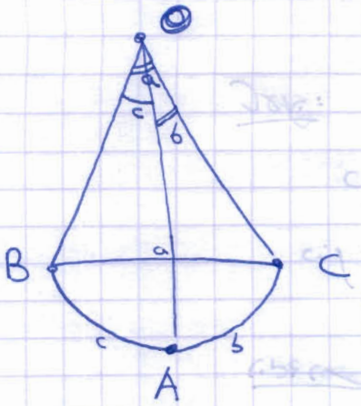
אם נוכיח את הלמה, נראה כי $\cos a < \cos b \cos c$ ומזה נקבל ש- $a<b+c$.

<u>הוכחה</u>



נתבונן במשולש הספרי $\triangle ABC$ <u>מהראשית</u>.

קיבלנו מעין "פירמידה מעוגלת".

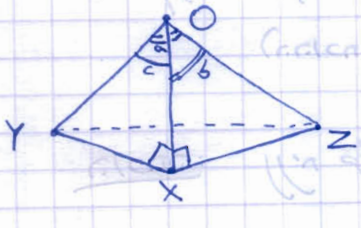


ניקח $X \in OA$ כך ש- $OX = 1$

ניקח $Y \in OB$ כך ש- $XY \perp OX$

ניקח $Z \in OC$ כך ש- $XZ \perp OX$.

אותו ציור מזווית אחרת:



נקבל (בהמשך לציור המצויר משמאל למטה) את השוויונות הבאות:

$$|OY| = \frac{1}{\cos c} \qquad |OZ| = \frac{1}{\cos b}$$

$$|YX| = \frac{\sin c}{\cos c} \qquad |ZX| = \frac{\sin b}{\cos b}$$

כעת נחשב את $|YZ|$ בשתי דרכים שונות:

יש לנו בעצם ~~שלושה~~ שני משולשים (אוקלידיים) רלוונטיים:

נחשב באמצעות משפט הקוסינוסים האוקלידי:

$$|YZ|^2 = \left(\frac{1}{\cos c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\cos b}\right)^2 - \frac{2\cos a}{\cos b \cos c}$$

$$|YZ|^2 = \left(\frac{\sin c}{\cos c}\right)^2 + \left(\frac{\sin b}{\cos b}\right)^2 - \frac{2\sin c \sin b \cos \alpha}{\cos c \cos b}$$

נשווה ונקבל:

$$\frac{1-\sin^2 c}{\cos^2 c} + \frac{1-\sin^2 b}{\cos^2 b} - 2\frac{\cos a}{\cos b \cos c} = \frac{-2\cos\alpha \sin b \sin c}{\cos b \cos c}$$

$$\Downarrow$$

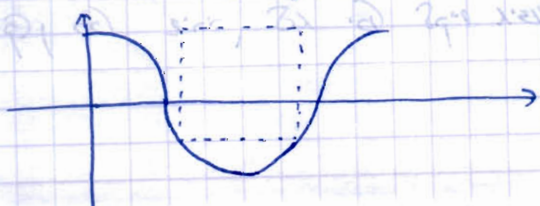
$$1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} = \frac{-\cos\alpha \sin b \sin c}{\cos b \cos c}$$

מסקנה:

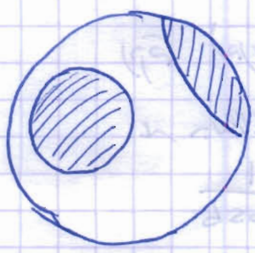
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

לכן: $\cos a \geq \cos b \cos c - \sin b \sin c = \cos(b+c)$

וכאשר $0 \leq a, b, c \leq \pi$ אז $\cos a \geq \cos(b+c)$ גורר $a \leq b+c$



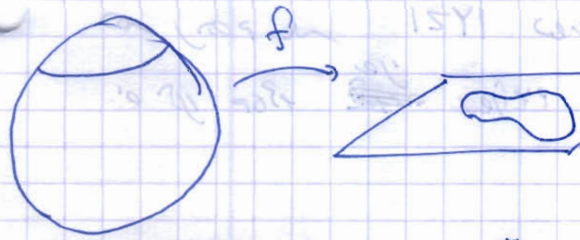
טענה: לא קיימת $f: U \to \mathbb{R}^2$ חח"ע ~~על~~ $U \subset S^2$ דיסק כלשהו
כך ש- $\rho_{\mathbb{R}^2}(f(x), f(y)) = \rho_{S^2}(x,y)$. כלומר, לא קיימת איזומטריה
בין דיסק ב-S^2 ל-$\mathbb{R}^2$.



הגדרת דיסק: מה שמסומן בציור משמאל.

מסקנה: אין איזומטריה מקומית בין $S^2(R)$ ל-$S^2(R')$
(ההוכחה בתרגיל).

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת f כנ"ל.



ניקח משולש שווה צלעות ב-U,
ונסתכל בתיכון לצלע שהוא
גם אנך וגם חוצה זוית.
(היות שתיכון הוא אנך וגם חוצה זוית ~~...~~ במשולש שווה צלעות נכון
גם בגאומטריה ספרית).

נשתמש במשפט הקוסינוסים הספרי:

$$\cos a = \cos\frac{a}{2}\cos x + \sin x \sin\frac{a}{2}\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\cos x = \frac{\cos a}{\cos\frac{a}{2}}}$$

מכיוון שהמשולש ב-$\mathbb{R}^2$, עבורה האורכים נשמרים (כי זו איזומטריה).

$$\boxed{x = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

לפי משפט פיתגורס

שתי עובדות אלה אומרות:

$$\cos a = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

מכיוון שלא הנחנו דבר על a, הדבר הזה כביכול נכון לכל a.
זה כמובן חשוד עד כדי לא נכון.
נראה כי קיימת סדרה $a_n \to 0$ עבורה המשוואה לא נכונה. (בכך נראה
כי לכל דיסק, קטן ככל שיהיה, לא יכול לקיים איזומטריה כזו).

נשתמש בטור טיילור:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4!} + \dots$$

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a\sqrt{3}}{2} = \left(1 - \frac{(\frac{a}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{a}{2})^4}{4!} + \dots\right)\left(1 - \frac{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^4}{4!} + \dots\right)$$

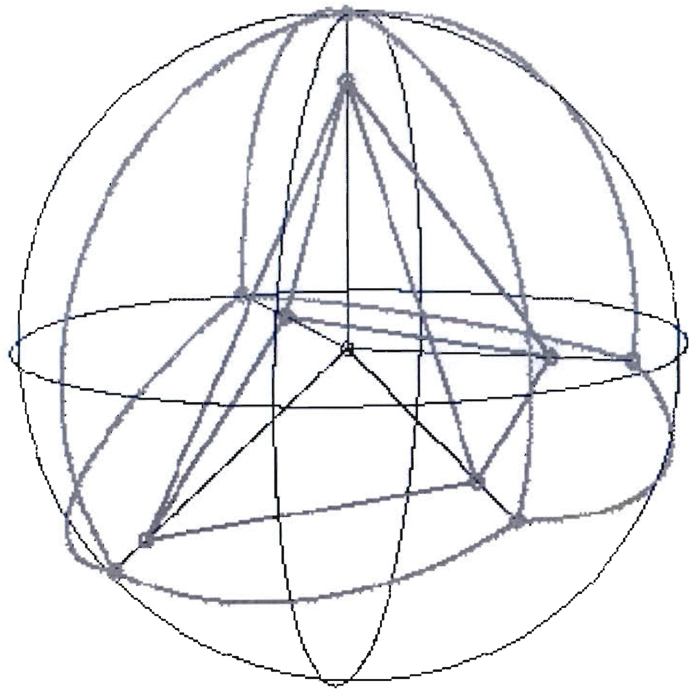
$$= 1 - \frac{a^2}{2} + \boxed{\neq 4!}\,a^4$$

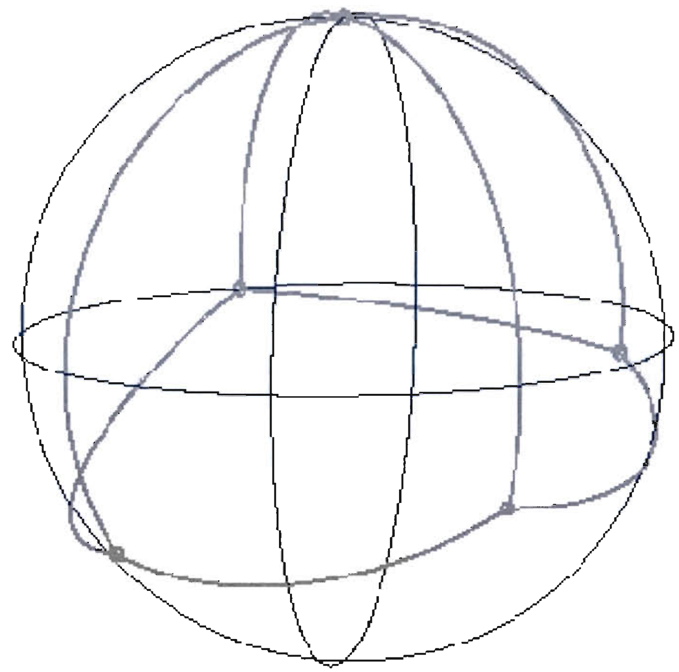
באופן מפתיע, טורי הטיילור מתלכדים עד לחזקה הרביעית, אך בכל זאת שונים בה.
התכונה הזו מראה לנו את ההבדל בין S^2 ל-$\mathbb{R}^2$, הנוגע לשם עקמומיות.
ניתן להגדיר עקמומיות באופן זה - גודל העוות של זוויות, אך היא אינה הגדרה טבעית ולכן נגדיר עקמומיות בהמשך באופן אחר.

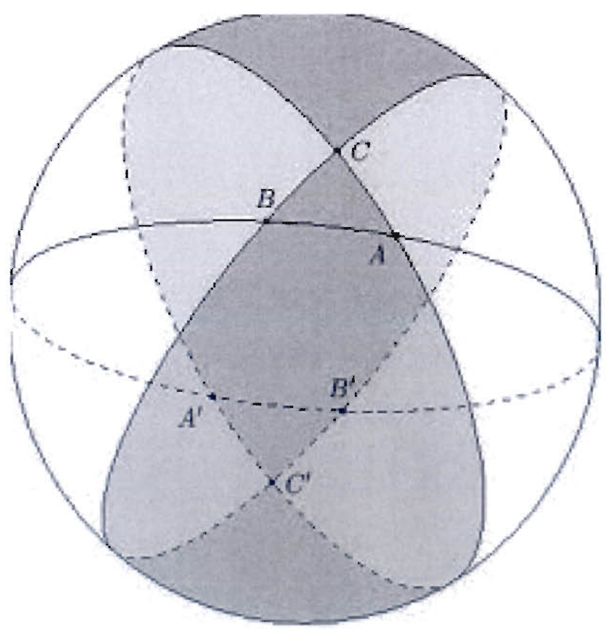
באחת השאלות בתרגיל נתבקש להוכיח משהו על איזומטריות של הספירה. לשם כך נצטרך קודם לחשוב על השאלה הבאה.

<u>תרגיל:</u> מה הקשר בין איזומטריות של S^2 לבין איזומטריות של $\mathbb{R}^3$.

מכיוון שלא הספקנו לדבר על כך היום, ניתן להתעלם מהתרגיל בשיעורי הבית השבוע (או לנסות לעשות אותו בכל זאת).






C
B
A
B'
A'
C'