1.3.11

גיאומטריה לא אוקלידית – שיעור 2

לאורך הרבה הדורות, מלומדים רבים שאלו איך מדדנו מרחקים גיאומטרי, מבלי שנגדיר ברור בדיוק מה אנחנו יודעים ומה ניתן להניח. כפתרון לכך ישנן שתי גישות

הגישה האקסיומטית

הגישה האקסיומטית – מושג הניסיון להתחיל ממספר אקסיומות ולהוכיח מתוכן התלה מאוקלידס. נסקור את "הדרכות הבסיסיות" למערכת אקסיומטית.

1. אוקלידס – הגדיר כ-30 "מושגים" (שאינם מוגדרים היטב), 5 אקסיומות ומשם פוסטולטים (במינו הינו מגדירים אותם כאקסיומות).
2. הילברט (1899) – הציע 6 מושגים לא מוגדרים היטב, ו-20 אקסיומות
3. Tarski (1929) – השתמש ב-4 מושגים (שלא מוגדרים היטב), ורק ב-4 אקסיומות אך משתמש בגישה המתמטית.
4. (1960)

הגישה הדיפרנציאלית

אפשרות שניה היא לנסות להבין את הגיאומטריה לתוך תוך יקום שכבר ישנו. כך נשתמש באלגברה על מנת להוכיח תכונות גיאומטריות.

בשיעור נשתמש לפעמים בגישה אחת ולפעמים באחרת (לפעמים בשניהן), כאשר המטרה העיקרית היא לא המתמטיקה הפורמלית אלא הבנה של המבנה. לכן בדרך כלל, אם יש הוכחות לשני האם ניתן להשתמש בגישה שנוחה יותר, השיעור הוא בדרך כלל כן.

לסיכום נעבור לנושא השיעור...

הגדרה:

סיווג: כל איזומטריה f של $\mathbb{R}^n$ (המקיימת, כל השמרת מרחקים) ניתנת לכתיבה כ- $f(x) = Ax + \vec{v}$ כאשר $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $A \in O(n)$.

מסקנה (מרשל): ב- $\mathbb{R}^2$ האיזומטריות היחידות הן הסבות, הנצבה T_a, סיבוב $R_{a,\theta}$, השיקוף S_L, והשיר (שיקוף מורכב עם הנצבה).

רעיון: להתחיל עם הנחה $f(0)=0$. להראות שניתן לייצג A כך ש- $f = Ax$.

בכל מרשל #2, יש מרשל לתאר את כל האיזומטריות ב- $\mathbb{R}^3$. הרעיון דומה, אבל הפרטים הטכניים קצת יותר מורכבים.

הרעיון: להתחיל עם $f = T_a \circ L$ כאשר $L \in SO(3)$.

הגדרה: $L \in SO(3)$ אומרים $L \in O(3)$ ועם $\det L = +1$.

עכשיו נסתכל:

- $L = Id \Rightarrow$ סבות / הנצבה
- $L \neq Id \Rightarrow L$ סיבוב סביב ישר, יש שכל וקטור $\vec{b}$. כמה נוכל לפרק את a כך: $a = \lambda b + c$.

לאחר מכן נקח $L \notin SO(3)$ (כלומר $L \in O(3)$)

נקבל בסך הכל כל קומבינציה של הנצבה, סיבוב, סיבוב סביב ישר, השתקפות.

תזכורת:

נגדיר $\phi: Iso(\mathbb{R}^n) \to O(n)$ כך:

$\phi(f) = A$ כאשר $f(x) = Ax + \vec{b}$.

קל להראות שגם המומורפיזם של הבורמה. מה הגרעין שלו?

הנגדר ב- $Ker(\phi) = Trans(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

נסמנה: $Trans(\mathbb{R}^n)$ את תת־חבורה נורמלית (קל מאוד אינטואיטיבית להבין זה).

נגדיר $\varepsilon: Iso(\mathbb{R}^n) \to \{+1,-1\}$ כך:

$\varepsilon(f) = \det(A)$ כאשר $f(x) = Ax + \vec{b}$.

נגדיר $Iso^+(\mathbb{R}^n)$, איזומטריות שומרות אוריינטציה, מעין האיזומטריות ש- ε שלהם ל- $+1$. קל להראות שגם ε הוא הומומורפיזם בין חבורות.

Orbit-Stabilizer Thm

אם G חבורה סופית הפועלת על קבוצה X.

אז ההעתקה $\frac{G}{Stab(x)} \to Orb(x)$ שנגדיר ע"י $g \cdot Stab(x) \to gx$

היא חח"ע ועל.

תזכורת הגדרות:

חבורה הפועלת על קבוצה היא חבורה שניתן להפעיל את איבריה על איבר x לשם להפעיל אותם זה מזה.

$Orb(x)$ זה המסלול של x, כלומר תמונת הפעלת כל איבר ב- G על x.

$Stab(x)$ הוא קבוצת האיברים ב- G המשאירים את x במקום

לא נוכיח משהו זה (הוכחתו באלגברה ב' 1), אך נשתמש בו. בפרט נקבל:

$|G| = |Stab(x)||Orb(x)|$ לכל x.

מן הבורות סופית של איזומטריות

בפסח שעבר הוכחנו שהבורות האיזומטריה הסופית של $\mathbb{R}^2$ הן C_n, D_n.
למעשה, הוכחנו עד כדי שם למעלה. נסתכל על אחת מהן:

<u>לעב</u> ל-G יש נקודת שבת כלומר:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n.\ \forall g \in G.\ gx = x$$

<u>הסבר:</u> לאומר - אנחנו יודעים שלא יכולה להיות הצמדה או גלישה בהבורה.
כמו כן, לא יכולים להיות שני סיבובים סביב מרכזים שונים
(כי אז נקבל הצמדה). לכן נעבר להוכיח על השתקפויות
וסיבובים סביב נקודה אחת. אז יש השתקפויות אז
לא D_n, אחרת לא C_n.

לשבר - נוכיח תחילה כי: $f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i f(x_i)$.

נגדיר מרכז המסלול של a כמיצוע המשוקלל של נקודות המסלול
שלו, כלומר $c = \frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} T(a)$

מן הבורות סופית של איזומטריות של $\mathbb{R}^3$

רוצים שב-$\mathbb{R}^3$ יש שני משפחות. נסתכל שב-$\mathbb{R}^3$ הגבולות לא
מאוד שונות. יש רק תוספת בורות שונות. שני המשפחות של $\mathbb{R}^2$
ועוד שלוש בבורות ספציפיות (לא משפחות):

בבורות הטטרהדר

בבורות הטטרהדר

בבורות הקוביה

גזיר של
מקוקדרון
(בו כאלה)

C_n D_n

בבורות הסופיות
ב-$\mathbb{R}^2$

אלכסון:

סעיף: כל איזומטריה f של $\mathbb{R}^n$ (חח"ע, על ושומרת מרחקים) ניתנת לכתיבה כ- $f(x) = Ax + \vec{v}$ כאשר $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $A \in O(n)$.

מסקנה (מרשל): ב- $\mathbb{R}^2$ האיזומטריות היחידות הן הזזות, הצבה T_a, סיבוב $R_{a,\theta}$, שיקוף S_L, ולאחר (שיקוף מורכב עם הצבה).

רעיון: להתחיל עם הנחה $\det f = 1$. להראות שניתן למצוא A כך ש- $f = Ax$.

בדף תרגיל 2#, יש תרגיל לתאר את כל האיזומטריות ב- $\mathbb{R}^3$. הרעיון דומה, אבל הפרטים הטכניים קצת יותר מורכבים.

הרעיון: להתחיל עם $f = T_a \circ L$ כאשר $L \in SO(3)$.

$$\boxed{\text{הערה: } L \in SO(3) \text{ אמ"מ } L \in O(3) \text{ וגם } \det L = +1.}$$

עכשיו נבדיל:

- $L = Id \Leftarrow$ הזזה / הצבה
- $L \neq Id \Leftarrow L$ סיבוב סביב ישר, יש שורש יחיד $\vec{b}$. כמו כן ניתן לפרק את a כך: $a = \lambda b + c$.

לאחר מכן נקח $L \notin SO(3)$ (אלא $L \in O(3)$)

נקבל בסוף כל קומבינציה של הצבה, סיבוב, סיבוב סביב ישר, השתקפות.

מ"מ תבורות סופיות של איזומטריות

נפסק שסדרה הכתבנו שתבורות האיזומטריה הסופיות של $\mathbb{R}^2$ הן C_n, D_n.
למעשה, הוכחנו עד כדי שני למות. נסתכל על אחת מהן:

<u>למה</u> G - ל יש נקודת שבת כלומר:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n.\ \forall g \in G.\ gx = x$$

<u>הסבר</u>: איזומטריה - אומרת יודעים שלא יכולה להיות הצמצמה או גלישה בהבורה.
כמו כן, לא יכולים להיות שני סיבובים סביב מרכזים שונים
(כי אז נקבל הזזה). לכן נוכל להסתכל על השתקפויות
וסיבובים סביב נקודה אחת. אם יש השתקפויות אז
זו D_n, אחרת זו C_n.

אלגברי - נוכיח מדוע כי $f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i f(x_i)$.

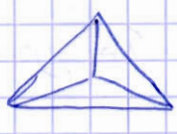
נגדיר מרכז המעגל של a בתור הממוצע של נקודות המעגל
שלו, כלומר $c = \frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} T(a)$

מ"מ תבורות סופיות של איזומטריות של $\mathbb{R}^3$

הוכנו שב-$\mathbb{R}^2$ יש שני משפחות. מסתבר שב-$\mathbb{R}^3$ הן גדלות לא
מעט שונות. יש רק חמש תבורות שונות, שני המשפחות של $\mathbb{R}^2$
ועוד שלוש תבורות ספציפיות (לא משפחות):

$\underbrace{C_n \quad D_n}_{\text{התבורות הסופיות ב- } \mathbb{R}^2}$

תבורת הטטראדר



תבורת הסיגריה של

תבורת הקוביה

$\boxed{\text{ג'ונר של בקבוקי בירה (בו בשם)}}$

5 הגופים הפלטוניים

הגדרה: פוליאדר ב-$\mathbb{R}^3$ נקרא קמור אם, עם פנים לא ריקים, המקבלת ע"י חיתוך סופי של חצאי מרחב.

הגדרה: פוליאדר רגולרי הוא פוליאדר שקיימים $r,s \in \mathbb{N}$ עבורם
כל קודקוד איור ל-r פאות (בדיוק)
לכל פאה יש s קודקודים (בדיוק)

הגדרה: מחצלת רגולרי מוגדרת כך פוליאדר רגולרי כך ש:
כל הפאות נפגשות באותה צורה ואותו מספר מקצועות נפגשים באותה צורה בכל קודקוד, ואורך כל המקצועות שווה
ניתן היה גם לתת הגדרה אלטרנטיבית (אך שקולה) עם אורכים. מה שאנחנו עושים להגדיר פה הוא למעשה שכל הקודקודים וכל הפאות "שווים זה לזה".

ב-$\mathbb{R}^3$ ישנם רק 5 גופים שהם פוליאדר רגולרי מוגדרים והם נקראים הגופים הפלטוניים.

אפלטון חשב שכל אחד מיסודות העולם (קובה מייצגת אדמה, ה"הדרון מייצג אש, אוקטהדרון מייצג אוויר, איקוסהדרון מייצג מים ודודקהדרון מייצג את היקום - ראה דף בסוף סיכום השיעור).

טענה: יש בדיוק 5 גופים פלטוניים ב-$\mathbb{R}^3$.

הוכחה: יש לנו תנאי משתנים דומים:

V	E	F	r	s
Vertices	edges	faces	כל קודקוד שייך ל-r פאות	לכל פאה יש s קודקודים
קודקודים	מקצועות	פאות		

יש לנו תנאי משתנים דומים:

$$2E = rV$$

$$2E = sF$$

הביטוי המרכזי בהוכחה הוא נוסחת אוילר (שהיא נכונה בכל):

$$V - E + F = 2$$

עבור כל פוליאדר.

יש לנשים הבה הוכחת רבות שמתוות מתמטיקה שונים, כולן הוכחת הנשים הבה נראה הוכחה באמצעות של נוסחת אוילר.

לפי נוסחת אוילר, נקבל:

$$\frac{V}{E} + \frac{F}{E} = 1 + \frac{2}{E} \xrightarrow{\text{לפי אמיר קידם}} \frac{2}{r} + \frac{2}{s} = 1 + \frac{2}{E} \Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

נשים לב שבהכרח $r, s \geq 3$, אחרת לא נקבל שצדי המומים.

אבל מהנוסחה שלנו קיבלנו ש- $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}$.

הפתרונות השלמים היחידים שמקיימים את המשוואה הזאת יכולים להיות רק מתוך $r, s \in \{3,4,5\}$.

האפשרויות היחידות שמקיימות את הנוסחאות מהמומים הקודם הן:

E	F	V	r	s	
6	4	4	3	3	ארבעון
12	6	8	3	4	קובה
12	8	6	4	3	אוקטאדרון
30	12	20	3	5	דודקאדרון
30	20	12	5	3	איקוסאדרון

החלק האחרון הוא להוכיח שהצורות הללו באמת קיימות. את שאר ההשאלות קל יחסית לבדוק, אבל השתים האחרות לא טריוויאלי. ארצל בא: לך לבסל מלא המצעים המדוקים, והשתבע שהצורה שלו קיימת.

<u>הערה</u>: בארבעה מימדים יש שש אבני פלטוניים (לאחד מהם יש מעל 700 קודקודים) ובכל מהמשה מימדים יש רק שלושה (שאר הפשרים).

נשים לב שבמקרה יש אינשהי קורלציה בין V ל- F. יש לן קשרים
של הפכיות בין חלק מהקודקודים, נדון בזה מאוחר יותר.

טענה: חבורת הסימטריה הסופית של $Zso^{+}(\mathbb{R}^3)$ הן C_n, D_n וחבורת
הסימטריה של הארבעון, הקובה והאוקטאדרון. (בהנחה שאנחנו מסתכלים על תת חבורות של $Iso(\mathbb{R}^3)$)

נראה סקיצה של ההוכחה, ונשלים את הפרטים בתרגיל (בקרוב בתרגיל #3).

I נסתכל את חבורת הסימטריה של הארבעון (נסמן $S(T)$), כלומר נראה
לאיזו חבורה שאנחנו כבר מכירים היא שווה.

רעיון: אם נסמן את קודקודי הארבעון במספרים, כל סימטריה של הארבעון
תשרה לי פרמוטציה. נגדיר $\phi: S(T) \to S_4$.

טענה: זה הומומורפיזם, ובפרט איזומורפיזם. (תרגיל).

נכשיו נעבור לשאר הפוליאדרים, שהם מורכבים יותר. נשתמש בתכונה הבאה:

תרגיל: אם $X \subset \mathbb{R}^3$ פוליאדר מקיים $-X = X$ (סימטרי ביחס לתרכז),
אז חבורת הסימטריות שלו $S(X)$ נתונה ע"י:

$$S(X) = S^{+}(X) \times \langle I \rangle$$

כאשר $S^{+}(X)$ זה קבוצת הסימטריות שומרות האורינטציה של X, ו- I
הוא השיקוף $\phi(x) = -x$

II תהי $G \subset SO(3)$ סופית מסדר n, זה כל איבר השונה מ- Id
הוא סיבוב, שבוחר את הסדרה S_2 עם 2 נקודות שבת.

נסמן ב- P_1 את קבוצת הקצבים, כלומר הנקודות שהוקן קיים איבר ב-G
השאיר אותן במקומם.

טענה: כל איבר ב- G מעביר כל קצב לקצב.

הסבר: יהי $p \in P$ קצב (כלומר $\exists g \in G.\ gp = p$)
יהי $h \in G$, hp קצב ובפרט $(hgh^{-1})(hp) = hp$

נסמן ב- Ω את קבוצת הנקודות על הספירה שרק נקודת שבת של איבר ב- G (למעשה הקטבים).

נסמן ב- $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_I$ את קבוצות המסלולים השונים ב- Ω.
(כלומר $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, כאשר Ω_i, Ω_j זרים)

נסמן ב- S_j את גודל המייצב המתאים: $S_j = \frac{|G|}{|\Omega_j|}$

נגדיר את הקבוצה $X = \{(A,u) \mid A \in G \setminus \{I\}, u \in S^2, Au = u\}$

נחשב את מספר האיברים בקבוצה (בדרך אחת) בשתי דרכים שונות.

$$\sum_{j=1}^{I} (S_j - 1)|\Omega_j| = |X| = 2(|G|-1)$$

מצד אחד, אנחנו יודעים כי לכל איבר יש שני קטבים, ולכן לקחנו את גודל G ללא הכלום פעמיים.

מצד שני, סכמנו "בחלקים". סכמנו את המסלולים אחד אחרי.

כעת נשתמש עם השוויון נחלק ב- $|G|$ ונשתמש בהגדרת S_j ונקבל:

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{j=1}^{I} 1 - \frac{1}{S_j}$$

נשים לב:

$$1 - \frac{1}{S_j} \geq \frac{1}{2}$$

ולכן:

$$\frac{1}{2} I \leq \sum_{j=1}^{I} 1 - \frac{1}{S_j} = 2 - \frac{2}{|G|} < 2$$

ולכן קיבלנו ש- $I = 1, 2, 3$, אבל לא יתכן ש- $I = 1$, מכיוון שיש רק $|G|$ איברים ב- G ויש $2(|G|-1)$ קטבים, לכן לא יתכן שכולם חלק משאר משלה.

נעבור עם $I = 2$ ו- $I = 3$. נסמן את שני האפשרויות.

נסמן את ה- Stabilizer-ים שלנו כשאמר:

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq 2$$

לפחות קיים

$I = 2$

$$2 - \frac{2}{|G|} = 2 - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \le 2 - \frac{2}{s_1}$$

$$\Rightarrow |s_1| \ge |G| \Rightarrow s_1 = |G| \text{ ואז } |\Omega_1| = 1$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{2}{|G|} = 2 - \frac{1}{|G|} - \frac{1}{s_2} \Rightarrow s_2 = |G| \text{ ואז } |\Omega_2| = 1$$

קומבינציה שיש אלמנטים שם אחד מהם בגודל 1. לכן הקבוצה $\Omega = \{v, -v\}$

הנשארים זהים מ הגדלים, וקיבלנו

$$G \cong C_n$$

$I = 3$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1 + \frac{2}{|G|}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{s_3} \ge 1 + \frac{2}{|G|} > 1 \Rightarrow s_3 = 2$$

(כי זה הכי קטן)

$$\Rightarrow \frac{2}{s_2} \ge \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{|G|} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow s_2 = 2 \text{ or } 3$$

כמה דרכים לחבר לאפשרויות. נשאר את הבדיקה הבאה:

אפשר: ⊙ $s_2 = 2 \leftarrow s_3 = 2, s_2 = 2, s_1 = \frac{|G|}{2}$

⊙ $s_2 = 3 \leftarrow s_1 = 3, 4, 5$

III) כמה נשיות טבלה עם כל האפשרויות שנתרו לנו:

S_1	$\lvert\Omega_1\rvert$	S_2	$\lvert\Omega_2\rvert$	S_3	$\lvert\Omega_3\rvert$	$\lvert G\rvert$
3	4	3	4	2	6	12
4	6	3	8	2	12	24
5	12	3	20	2	30	60
$\frac{\lvert P\rvert}{2}$	2	2				

כמה נתר להתאים כל אפשרות לתמורה סימטרית כלשהי. אין צורך להוכיח פרטנית אלא לבדוק לראות שזה נכון. נסתכל לדוגמא על השורה השנייה.

הסבר אינטואיטיבי:

~~לקבוצה נקח את הצד שלה~~

בשורה 2 הנ"ל S_1 הוא מתחלק לקבוצות מסדר 4. כמה דרכים להתאים כל איבר בתמורה לסימטריה של ארבעון.

שנשאר ~~בלתי~~ בשורות הראשונות מאותו לאחים כלכלנים, והאחרונה מאותו לתמורה הדיאדלית.

מת תמורות דיסקרטיות של איזומטריות

$G \subset Iso(\mathbb{R}^n)$ היא דיסקרטית אם $\forall x\in\mathbb{R}^n.\ \exists \varepsilon>0.\ \forall y\in Gx.\ p(x,y)>\varepsilon$.

נגדיר $\mathbb{R}^n \cong Trans(\mathbb{R}^n)$ – כל וקטור ב מרחב יצורה על הנקודה באמצע הוקטור.

טענה: תהי $\Gamma < Trans(\mathbb{R}^n)$ תת חבורה דיסקרטית

אז קיימים וקטורים $p_1,\dots,p_k \in \mathbb{R}^n$ בת"ל כך ש $\Gamma = Sp_z\{p_1,\dots,p_k\}$

כאשר Sp_z זה קבוצת הקומבינציות הלינאריות עם מקדמים ב- $\mathbb{Z}$.

אומרים עם ש- Γ הוא שריג.

נכתב ב-$\mathbb{R}^2$ (ניתן להכליל למקרה הכללי באינדוקציה).

שלב ג': קיים ב-Γ וקטור בעל אורך מינימלי. (לא כולל וקטור האפס)

הסבר: קיים רדיוס R מספיק גדול כך ש- $B^2(R) \cap \Gamma \neq \emptyset$

מדיסקרטיות נובעת שיש רק מספר סופי של נקודות כאלו.

נקח את המינימלי בקבוצה סופית זו (לא האפס), הוא גם קצר מאחר

הוקטורים ב-Γ. נסמן את הוקטור המינימלי ב-u.

שלב ד': נסמן ב- $l = \overrightarrow{ou}$ (קווי הישר המחבר בין אפס ל-u).

נשים לב ש- $nu \in \Gamma$ לכל $n \in \mathbb{Z}$ (בגלל ש- Γ חבורה).

טענה: $\Gamma \cap l = \{nu \mid n \in \mathbb{Z}\}$

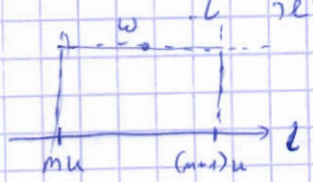
הסבר: הראינו כבר בהלכתה בחוברת. ניתן בקלות שקיים וקטור $v \in \Gamma$

כך ש- $v \in (mu, (m+1)u)$.

אבל בהכרח $v - mu \in \Gamma$ בסתירה למינימליות של u.

שלב ה': אם $v \in \Gamma \setminus l$ $\nexists$ אז סיימנו.

אחרת: קיים $v \in \Gamma \setminus l$ עם מרחק מינימלי מהישר l.



הסבר: יהי $w \in \Gamma \setminus l$ ונתבונן במלבן הבא:

~~[illegible]~~ מדיסקרטיות נובעת שיש רק

מספר סופי של נקודות בתוך המלבן. לכן יש מינימום

(במלבן), נקרא לה v.

נראה ש- v מינימלי לא רק ~~[illegible]~~ במלבן. ניתן בקלות כי הנקודה

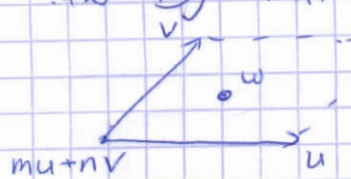
t במרחק קצר יותר מ-u, אז נוכל להביא אותה לתוך המלבן

באמצעות חסרת מספר שלם של u (לשם $t+mu$) ונקבל

סתירה למינימליות v.

כמו נובע כי כל נקודה ב- Γ מהצורה $mu+nv$. ניתן בקלות

ש- w שייך ומשלבים l נקבלת כך:



אז נסתכל על $w - mu - nv$ ונקבל סתירה

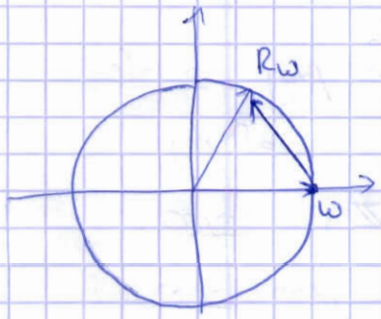
למינימליות של v. קיבלנו כי Γ הוא שרג.

הסבלת קרוסלות

יהי $L \subset \mathbb{R}^2$ מרחב, ונגדיר $S(L) = \{g \in Iso(\mathbb{R}^2) \,.\, g(L) = L\}$.

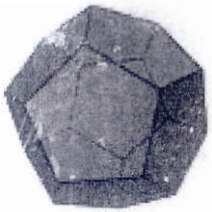
טענה: אם $g \in S(L)$ סיבוב אז קיים $m \in \{2,3,4,6\}$ כך ש- $g^m = Id$.
כלומר g הוא סיבוב בזוית $\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$.

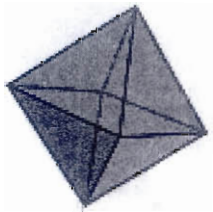
הוכחה גאומטרית (לא פורמלית)

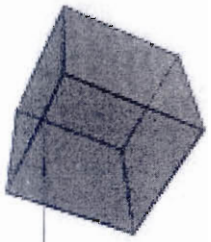


ניקח $0 \neq w \in L$ בעל אורך מינימלי.
נסמן ב- $R_{0,\theta}$ את הסיבוב "הכי קטן". נניח:
נניח להראות כי $\theta = \frac{\pi}{3}$ אחרת $R_w - w$
קטן יותר מ- w וזו סתירה.

משאר הבא נראה הוכחה פורמלית מטריצולוגית.



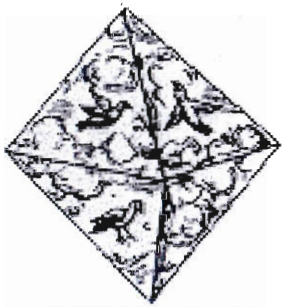
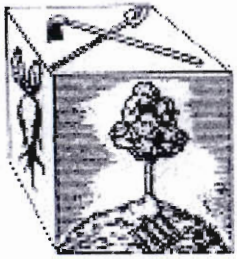
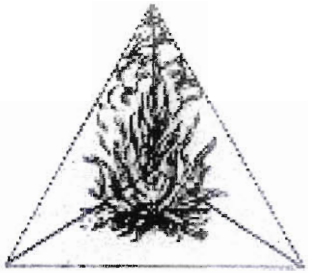
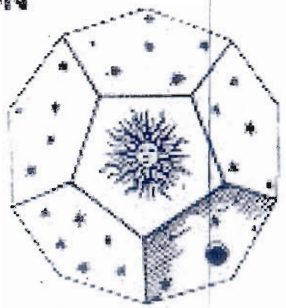
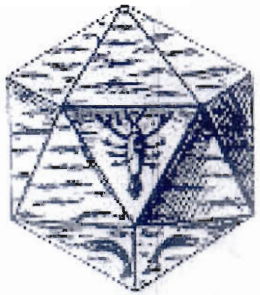
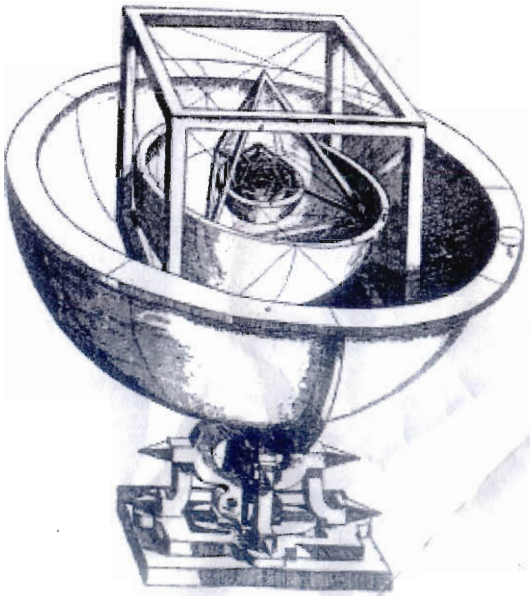




איקוסהדרון (עשרימון-20 פאות)

דודקהדרון (תריסרון-12 פאות)

אוקטהדרון (תמניון-8 פאות)

הקסהדרון (קובייה - 6 פאות)

טטרהדרון (ארבעון - 4 פאות)