

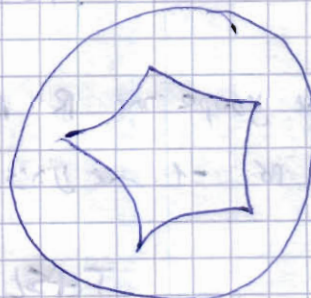
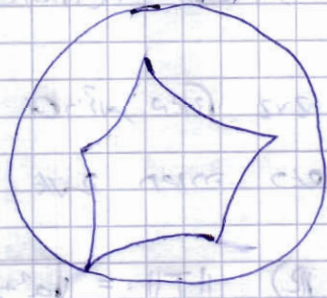
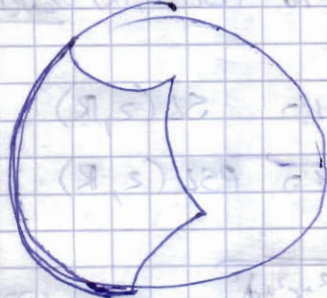
[illegible]

$\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ acts properly discontinuously on $\mathbb{H}$ iff
if $\forall K \subseteq \mathbb{H}$ compact. $gK \cap K = \emptyset$
 $g \in \Gamma$ $\neq$ id $\Rightarrow gK \cap K = \emptyset$

acts properly discontinuously if $A' \cap K = \emptyset$ for $G \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$

מקרה אחר: $PSL(2, \mathbb{Z}) \subset PSL(2, \mathbb{R})$. מ. חסידים בסקר.
 חסידים: (המשפחה) $\Gamma \subset Iso^+(H)$ בסקר. מ. חסידים בסקר.
 סדרה $\{g_i\}$ מ- Γ (יציבה) מקיפה - $\{g_i x\}$ אין גבול ב- H .
 (אפשר לחשוב על זה כעל פסגות בקוואדראט בסקר. PSL)

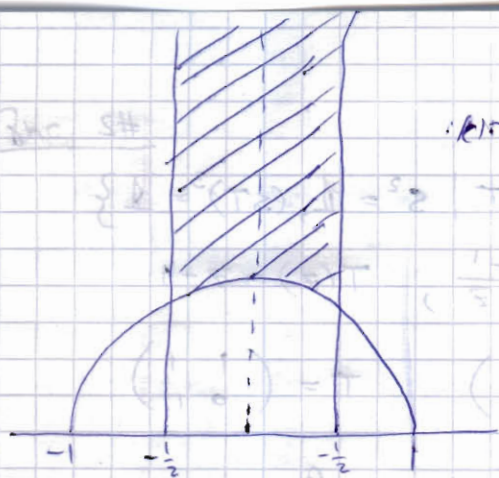
הוכחה
 בליטת זרועות הן חזקה של חזקה
 חזקה של חזקה
 חזקה של חזקה



PK $\Gamma \subset \text{Iso}^+(H)$ e 310 μm cm^{-1} F infrared

הכיוון פשוט (קל)
 $x_1 \neq x_2 \in \Gamma \quad \delta F = x_1 F \cap x_2 F = \emptyset$ (1)
 $\bigcup_{x \in \Gamma} x F = H$ (2)

$$\bigcup_{j \in F} jF = H \quad (2)$$



הפונקציה $P_2(z, \bar{z})$ היא

$$D = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \leq 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$$

הפונקציה $g(z)$ היא הפונקציה הליניארית

המבטאת את המרחק בין הנקודה z לנקודה d .

דוגמה #1

נניח $z \in \mathbb{H}$ ונניח $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ו- $ad-bc=1$.

נרצה להוכיח כי $\operatorname{Im}(g(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.

הוכחה

$$\operatorname{Im}(g(z)) = \frac{1}{2i} [g(z) - \overline{g(z)}] = \frac{1}{2i} \left[\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \right]$$

אם $ad-bc=1$ אז

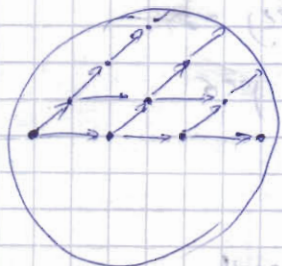
$$= \frac{1}{2i} \frac{ac|z|^2 + bc\bar{z} + adz + bd - ac|z|^2 - bd - ad\bar{z} - bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

$$|cz+d| \leq 1 \iff \operatorname{Im}(g(z)) \geq \operatorname{Im}(z)$$

כלומר, הפונקציה g היא קונפורמלית.



הפונקציה g היא קונפורמלית.

כלומר, היא מבצעת מרחיבה קונפורמלית.

הפונקציה g היא קונפורמלית.

דף #2

$$PSL(2, \mathbb{Z}) \cong \langle S, T \mid S^2 = 1, (ST)^3 = 1 \rangle$$

$$S(z) = -\frac{1}{z}, \quad T(z) = z + 1$$

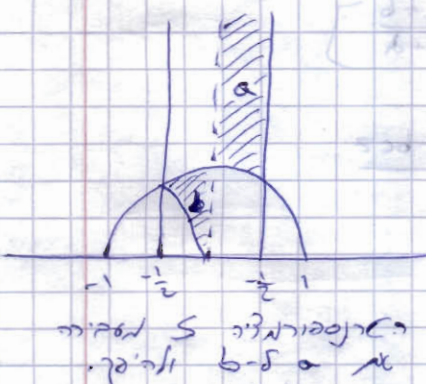
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפעם אנחנו עוקבים אחר זה כי ברור שקבוצה זו (הקבוצה הנפגעת) היא מה הפונקציות האלה היא מה חבורה של PSL אם נשים לב ונראה שכל מה שחברתם עם הפונקציות, אם נבדוק של PSL יכולים להיות מה שחברתם עם הפונקציות (אפשר רק לראות מהחבורה).
כבר נראה שיש פה פונקציה שבה לא חסר מה שחברתם של PSL (כלומר, הוא לא שווה כלום כי חבורה הפעולה של PSL).

$$G' = \langle S, T \rangle$$

$$\bigcup_{g \in G'} gD = \mathbb{H}$$

דף #3



(S זה סיבוב ב- π סביב i)
(T זהה לזרימה)

הוכחה

יהי $z \in \mathbb{H}$ נבחר $\tilde{g}$ וננסה בק"מ

כך $e = \text{Im}(\tilde{g}z)$ נקרא

נפסל את $T^k(\tilde{g}z)$ וננסה ק"מ

בזווית $-\frac{1}{2} \leq \text{Re } z \leq \frac{1}{2}$

$\text{Im}(w) = e$ של $w = T^k(\tilde{g}z)$

נעשה נקודות. כי ננסה לראות רק אפשרות אחת, ננסה:

$$\text{Im}(w) \geq \text{Im}(Sw) = \text{Im}\left(\frac{-1}{w}\right) = \frac{\text{Im}(w)}{|w|^2}$$

לכן נקבע כי $|w|^2 \geq 1$

כל $w \in D$

#4 סדרה

$$g=1 \text{ שם } g \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \text{ וזו } gz \in D, z \in D \text{ כל}$$

הוכחה: נניח קיימת הנחה שיש $\beta > 0$ כזה, שכל z שמתקיים $\text{Im}(z) \geq \beta$ (כלומר z אינו קרוב ל-0 או ל-1) אז $gz \in D$.

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{לוקחים}$$

$$a=d=1 \Leftrightarrow ad=1 \text{ שם } \underline{c=0} \quad \text{כל}$$

$$b \in \mathbb{Z}, \quad g(z) = z+b \Leftrightarrow$$

$$g=1 \Leftrightarrow b=0 \text{ שם } 1 \text{ הוא זהה}$$

$$c \neq 0 \quad \text{לוקחים}$$

$$g(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)} \quad \left(= \frac{acz+ad-1}{c(cz+d)} \right)$$

$$\Rightarrow (g(z) - \frac{a}{c})(cz+d) = -\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow (g(z) - \frac{a}{c})(z + \frac{d}{c}) = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow |g(z) - \frac{a}{c}| |z + \frac{d}{c}| = \frac{1}{c^2} \quad (*)$$

$$\text{נניח } \text{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z \in D \quad \text{כל } z \in D \quad (**)$$

$$\text{Im}(g(z)) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow g(z) \in D$$

$$|c| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{4} \quad \text{כל } (*) \text{ ו- } (**)$$

(כלומר $\text{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ וזו z אינו קרוב ל-0 או ל-1) אז $gz \in D$.

$$c = 0, 1, -1$$

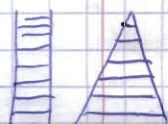
$$c = \pm 1 \text{ כל } c \text{ כל } 0$$

$$|g(z)| = |a| |z+d| = 1$$

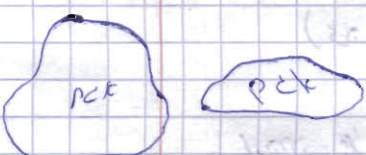
$$|z+d| > 1 \text{ כל } z \in D$$

כל $z \in D$ אז $gz \in D$ וזו z אינו קרוב ל-0 או ל-1.

אנאליזה פרויקטיבית



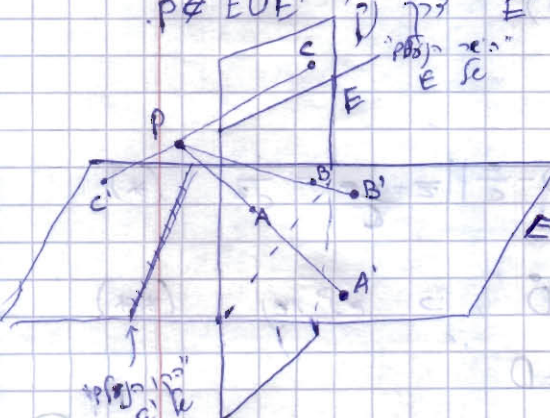
המקור של הסט הוא מהותה הפרספקטיבית, כמו בצילום. כאשר
 נרצה לצייר סט נכנס או לא, דהיינו יורא אחת או שתיים
 הפרספקטיבית. הפרספקטיבית נותנת לנו את המידע של היחסים והמיקום.



אנאליזה פרויקטיבית משמשת הינו באמצעות כאלו אפיקה
 למחשבה, וכן סקיצות מעקב (שחזור מנקודת מבט אחרת).
 זו משמשת

באופן זה (ומכאן), ניתן להבין את המושג הפרספקטיבית כמקרה פרטי
 מהאנליזה הפרספקטיבית. אנאליזה פרויקטיבית.

כדי להבין: נניחון קבוצה של נקודות E ונקודות E' בקו P ונקודות E' בקו P .



כל נקודה E בקו E' ונקודה E' בקו E (חיתוך) E'

מכאן "הנקודה" E

(הנקודה E על הנקודה E' בקו P).

כל נקודה E בקו E' ונקודה E' בקו E (חיתוך) E'

"הנקודה" E'

(הנקודה E על הנקודה E' בקו P).

כדי להבין: נניחון קבוצה של נקודות E ונקודות E' בקו P ונקודות E' בקו P .

$$x_1 = (1, 0, 0)$$

$$x_2 = (0, 1, 0)$$

$$x_3 = (0, 0, 1)$$

$$E = \text{sp} \{x_1, x_2\}, E' = \text{sp} \{x_2, x_3\}$$

$$P = (-1, 0, 1)$$

$$A' = P + t(A - P) \text{ ו- } A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E \text{ ו- } A' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E'$$

הקשר בין x_1, x_2 ו- y_1, y_2

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+x_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

אם $x_1 = -1$ הרי E הוא

$y_2 = 1$ הרי E' הוא

קואורדינטות החדש

בהקשר למערכת E נק' (x_1, x_2) נקרא (u_1, u_2, u_3) ב- E'

$$x_1 = \frac{u_1}{u_3}, \quad x_2 = \frac{u_2}{u_3}$$

הערה: אין חשיבות ל- x_1, x_2 אלא רק ל- $\frac{x_2}{x_1+1}$ ו- $\frac{x_1}{x_1+1}$

אם נסתכל על $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ נראה ש- $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ הם קואורדינטות ב- E'

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_2}{x_1+1} = \frac{\frac{u_2}{u_3}}{\frac{u_1}{u_3}+1} = \frac{u_2}{u_1+u_3}$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{\frac{u_1}{u_3}}{\frac{u_1}{u_3}+1} = \frac{u_1}{u_1+u_3}$$

אם נסתכל על $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ נראה ש-

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_1+u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \equiv f \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

הערה: המטריצה f היא (הח"ס) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

אם $u_1+u_3=0$ הרי E הוא

אם E' הרי $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ הם קואורדינטות ב- E'

אם $u_1+u_3=0$ הרי E הוא $y_2=1$ ו- E' הוא $y_1=1$

גאומטריה פרויקטיבית (ישר פורמלי)

י"י V מ"ו מ"מ"ז סוג F $(F = \mathbb{C}, \mathbb{R})$

המרחב הפרויקטיבי $P(V)$ מ"מ"ז פ"מ"ז קבוצה מ המרחב

המ"מ"ז פ"מ"ז V

$$P(V) = \{ 1\text{-dim subspaces of } V \}$$

המרחב: $P(V) \cong \frac{V \setminus \{0\}}{\sim}$

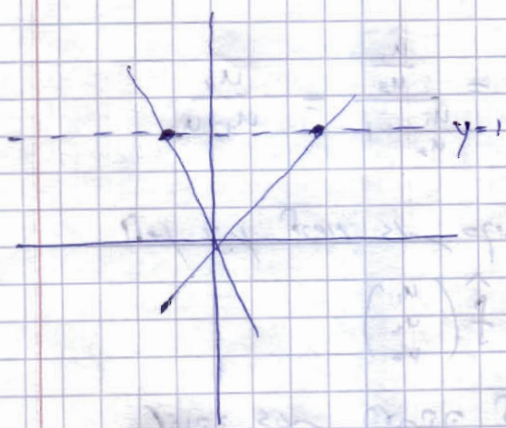
כאשר $x_1 \sim x_2$ פ"מ"ז $x_2 = \lambda x_1$ $\lambda \in F^*$

המרחב הפרויקטיבי $P(V)$ מ"מ"ז $\dim P(V) = n \iff \dim V = n+1$ אם $P(V)$ מ"מ"ז

המרחב הפרויקטיבי: המרחב הפרויקטיבי מ"מ"ז פ"מ"ז פרויקטיבי

פ"מ"ז מ"מ"ז פ"מ"ז פרויקטיבי

א"מ"ז מ"מ"ז $P(V)$ פ"מ"ז פ"מ"ז פ"מ"ז פ"מ"ז



למשל: $P(\mathbb{R}^2)$

המרחב הפרויקטיבי $P(\mathbb{R}^2)$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

$y=x$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

המרחב הפרויקטיבי $P(\mathbb{R}^2)$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

המרחב הפרויקטיבי $P(\mathbb{R}^2)$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

המרחב הפרויקטיבי $P(\mathbb{R}^2)$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

המרחב הפרויקטיבי $P(\mathbb{R}^2)$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

המרחב הפרויקטיבי $P(\mathbb{R}^2)$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

$$P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

המרחב הפרויקטיבי

$$P(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^{n-1}$$

$$P(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}P^{n-1}$$

המרחב הפרויקטיבי $\mathbb{R}P^1$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

המרחב הפרויקטיבי $\mathbb{R}P^1$ מ"מ"ז $\mathbb{R}$ מ"מ"ז

6. הוכח כי $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב טופולוגי.

נניח כי V הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו- $\{v_1, \dots, v_n\}$ היא בסיס של V .
 כל וקטור $v \in V$ ניתן לכתוב בצורה $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ עבור מספרים ממשיים $x_1, \dots, x_n$.
 נגדיר את המרחב $\mathbb{R}^n$ כמרחב המורכב מכל n -טופל של מספרים ממשיים.
 נגדיר את המרחב $\mathbb{R}^n$ כמרחב המורכב מכל n -טופל של מספרים ממשיים.

נניח כי $V \cong \mathbb{R}^n$ ו- $v_1, \dots, v_n$ היא בסיס של V .
 $P(V) \cong P(\mathbb{R}^n)$ ו- $P(V)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
 נגדיר את המרחב $\mathbb{R}^n$ כמרחב המורכב מכל n -טופל של מספרים ממשיים.

סימון: $[v]$ הוא וקטור במרחב $\mathbb{R}^n$ המיוחס ל- v .

$$V \cong \mathbb{R}^n = \sum_{j=1}^n x_j v_j, x_j \in \mathbb{R}$$

$$P(V) \cong U_{n+1} = \{ [v] \in P(V) \mid v = \sum_{j=1}^n x_j v_j, \text{ s.t. } x_{n+1} \neq 0 \}$$

נגדיר את המרחב $\mathbb{R}^n$ כמרחב המורכב מכל n -טופל של מספרים ממשיים.

$$[v] \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

כעת, $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את המרחב $\mathbb{R}^n$ כמרחב המורכב מכל n -טופל של מספרים ממשיים.

המרחב $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את המרחב $\mathbb{R}^n$ כמרחב המורכב מכל n -טופל של מספרים ממשיים.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1}$$

כעת, $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את המרחב $\mathbb{R}^n$ כמרחב המורכב מכל n -טופל של מספרים ממשיים.

הוכחה

אם $U \subseteq V$ אז $P(U)$ היא תת-קבוצה של $P(V)$.

אם $U \subseteq V$ אז $P(U)$ היא תת-קבוצה של $P(V)$.
כלומר יש פחות פחותים מאשר ב- $P(V)$.

הוכחה

יהי $x, y \in P(V)$.

נניח ש- x, y אינם ניתנים לבינון, כלומר $x \not\subseteq y$ ו- $y \not\subseteq x$.

נניח ש- x, y אינם ניתנים לבינון. אז $x \not\subseteq y$ ו- $y \not\subseteq x$.
נניח ש- x, y אינם ניתנים לבינון. אז $x \not\subseteq y$ ו- $y \not\subseteq x$.
אם $U \subseteq V$ אז $P(U)$ היא תת-קבוצה של $P(V)$.

נניח ש- x, y אינם ניתנים לבינון. אז $x \not\subseteq y$ ו- $y \not\subseteq x$.
אם $U \subseteq V$ אז $P(U)$ היא תת-קבוצה של $P(V)$.
אם $U \subseteq V$ אז $P(U)$ היא תת-קבוצה של $P(V)$.

אם $U \subseteq V$ אז $P(U)$ היא תת-קבוצה של $P(V)$.

הוכחה

יהי $P(V)$ מערכת פחותים (dim V = 3).

נניח ש- $U_1, U_2 \subseteq V$ אז $P(U_1), P(U_2)$ הם מערכות פחותים.

$$3 = \dim V \geq \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$= 2 + 2 - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow 1 \leq \dim(U_1 \cap U_2)$$

אם $U_1 = U_2$ אז $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$.
אם $U_1 \neq U_2$ אז $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.
אם $U_1 \neq U_2$ אז $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

יש לה שנתן משלים רק באמצע עיגול ואז יסודות. המורה
היה אכן זה שיש לה מורה.

עשו סוכנות זכרון בסיס אסר למהלך לראות מה חסר האולי
הוא (הפירוק) היה.

Desargues Thm

שני משולשים, $A'B'C'$, ABC

הם פרספקטיביים מנקודה P

הם פרספקטיביים מנקודה P'

AA'	הם חופפים
BB'	
CC'	
	(פירוק קו)

$AB, A'B'$	הם חופפים 3 הנקודה
$BC, B'C'$	
$CA, C'A'$	
	(פירוק קו) קו אחד יש לו השני פירוק קו אחד יש לו

אם יש נקודה אחת של המשולשים ABC ו- $A'B'C'$ אזי הם חופפים
פירוק קו אחד יש לו, באמצעות אמצע עיגול
אולי למהלך זה של הפירוק נניח אולי זה האולי.

המשפט: המרחב הפרספקטיבי

אם $T: V \rightarrow W$ פירוק קו
אם $u \in V$ אז $T(u) \in W$
אם $u \in V$ אז $T(u) \in W$
if $\text{Ker}(T) = 0$: $\dim(u) = \dim(T(u))$
אם יש פירוק פרספקטיבי שונים למהלך הפרספקטיבי
אולי זה $\dim(T) = 0$.

$$T: P(V) \rightarrow P(W)$$

המשפט: המרחב הפרספקטיבי הוא המרחב שנתן אקסיה שלמה הנה.
(האקסיה הפרספקטיבי של פירוק קו עיגול אסר)

הוכחה: $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

1. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

2. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

3. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

4. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

5. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

6. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

7. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

8. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

9. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

10. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

11. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

12. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

13. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

14. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

15. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

16. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

17. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

18. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

19. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

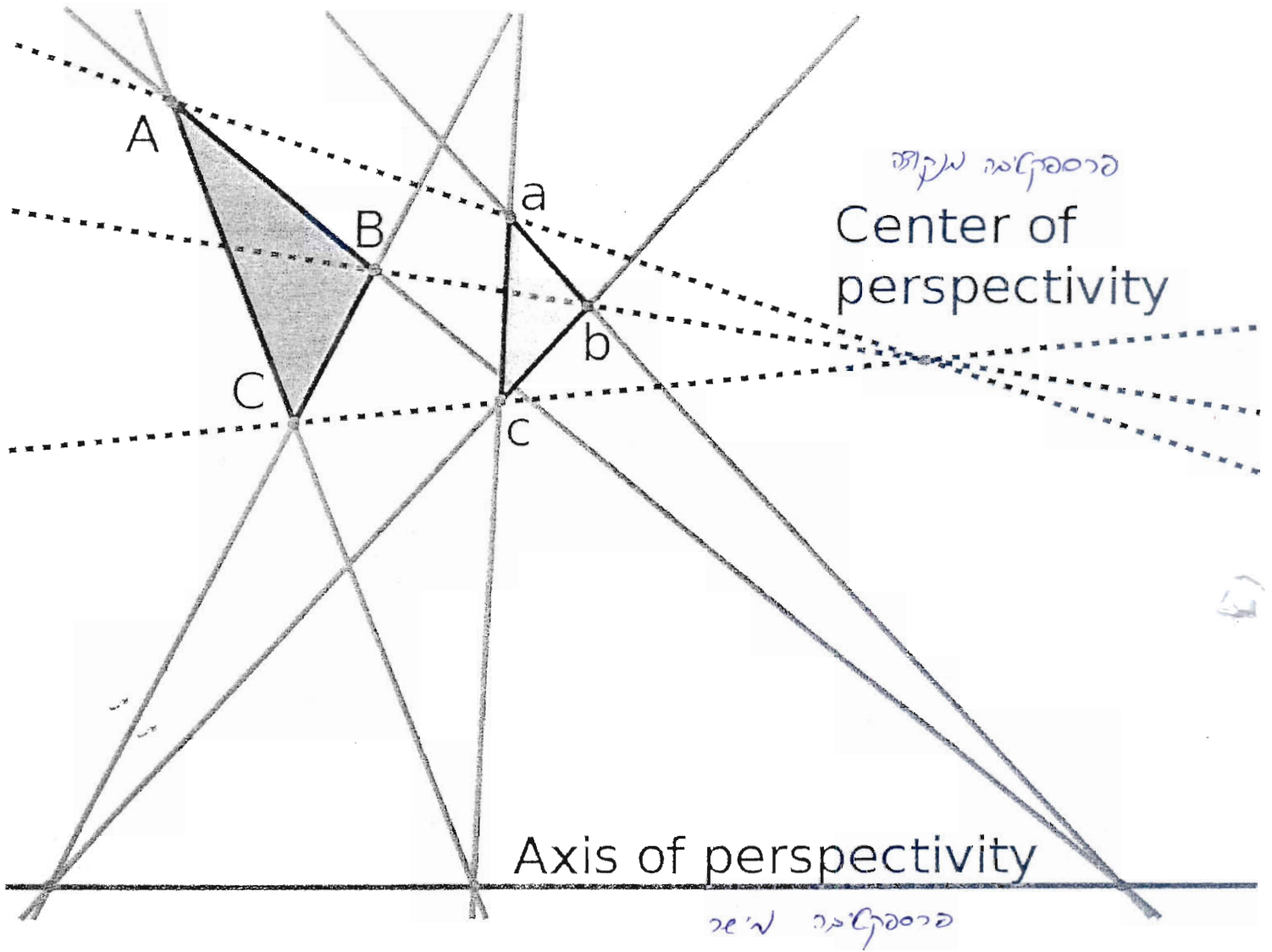
20. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

21. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

22. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

23. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$

24. $P(V)$ מתאמת ל- $P(V)$ על ידי $P(V)$



Desargues Thm (במהלך הוכחה)

יהיו A, A', B, B', C, C' נק' על שתי מישורים שונים
 AA', BB', CC' מתכנסות בנקודה P (מרכז הפרויקציה)

יש לקבוע הנקודה $C'' = AA' \cap BB'$

$$C'' = AB \cap A'B'$$

$$B'' = CA \cap C'A'$$

$$A'' = BC \cap B'C'$$

נראה כי הנקודה A'' נמצאת על הישר CC'' .

כאשר נבנה הנקודה A'' נראה כי היא נמצאת על הישר CC'' .

