

אם הן ביאור סדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כאשר $a_1, a_2, \dots$ מספרים ממשיים.

נבדוק $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה)

אם הסדרה S_n מתכנסת אל אלוהים שבאר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ומכאן, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. אם הסדרה מתכנסת אל אלוהים שבאר מתכנסת.

דוגמאות:

(1) הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ מתכנסת כאשר $|q| < 1$ (ואם $|q| < 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$)

מתכנסת כאשר $|q| > 1$, בפרט $S_n = q + q^2 + \dots + q^n = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

(2) הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנסת:

נניח בפרט, הבה, שבאר מתכנס, $S_{2n} \rightarrow S \iff S_n \rightarrow S$.

$$S_{2n} - S_n \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ פעמים}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(3) הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנסת.

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

אם ככה נקרא את הסדרה.

אם: אם הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת, אז $a_n \rightarrow 0$ כ- $n \rightarrow \infty$.

הוכחה: נסמן $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $S_n \rightarrow S$ $S_{n-1} \rightarrow S$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא את חיובי אם $a_n > 0$ ב- n .

אם: אם חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת אל אלוהים הסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

הוכחה: מכיון ש- $a_n > 0$ ב- n , הסדרה $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

היא מתכנסת אל אלוהים.

משפט: אם $0 < a_n < b_n$ ב BP n , s_k :

(א) אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס s_k $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתפזר s_k $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתפזר.

נוכחתי: $\sum b_n \leq$ מתכנס $\Leftarrow$ סדר הסכומים חלקיים של הסדר

$\Leftarrow$ סדר הסכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ג) נניח שלדג $\sum b_n$ מתכנס, אז לפי חלק א', $\sum a_n$

מתכנס, סגור.

(המשפט נקרא קריטריון הפשוט לאזורים חזקים)

אנחנו: האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

נוכחתי: נניח שהאם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס.

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$$

האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ מתכנס, חלק, עם קריטריון הפשוט,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

אנחנו: (קריטריון הפשוט האזורי חזקים)

אם $0 < b_n$ מתכנס, $a_n > 0$, והדבר $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים (ולא אינסופי).

s_k אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

נוכחתי: הסדר $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנס, לפי חסידה, לפי c כק c כק c .

$\frac{a_n}{b_n} \leq c$ ב BP n , לפי $a_n \leq c \cdot b_n$ ב BP n , $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot b_n$ מתכנס,

לפי עם קריטריון הפשוט, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

משפט: האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ מתכנס אם $a > 1$.

נוכחתי: נניח $f(x) = x^{1-a}$ עם $a > 1$, $(b = n+1, a = n)$.

$$n^{1-a} - (n+1)^{1-a} = (-1)(1-a) \cdot c^{-a} \quad (n < c < n+1)$$

$$= \frac{a-1}{c^a} > \frac{a-1}{(n+1)^a} \quad (a > 1 \text{ כמש})$$

2

$$\frac{1}{(n+1)^a} < \frac{n^{1-a} - (n+1)^{1-a}}{a-1}$$

לפי, כמש $a > 1$,

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} < \frac{1}{a-1} \left[1 + (1-2^{1-a}) + (2^{1-a} - 3^{1-a}) + \dots + ((n+1)^{1-a} - n^{1-a}) \right]$$

$$< \frac{2}{a-1}$$

הבה נסתכל: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ היא סדרה מתכנסת אז $a_1 > a_2 > a_3 > \dots \rightarrow 0$

הבה נסתכל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת אז $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנסת.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots < a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots > a_2 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n a} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-a})^n \quad \text{כאשר } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ מתכנסת } \iff \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-a})^n \text{ מתכנסת}$$

אם $a > 1$ מתכנסת סדרה זו, אם $a \leq 1$ מתפזרת.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad 2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n (n \ln 2)} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} \text{ מתכנסת } \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \text{ מתפזרת } \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ מתפזרת}$$

אזורים β -ים

משפט: אם $\sum a_n$ מתכנסת, $\sum b_n$ מתכנסת, אז $\sum a_n + b_n$ מתכנסת.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

הערה: אם $\sum a_n$ מתכנסת, נקרא $\sum |a_n|$ מתכנסת.

משפט: β היא מתכנסת בהחלט.

הוכחה: אם קיימת קבוצה סדורה, הרי $\sum a_n$ מתכנסת.

הסדרה S_n מתכנסת $\iff$ הסדרה S_n היא סדרה קושי.

$\iff \forall \epsilon > 0 \exists N > 0$ כך שלכל $n, m > N$, $|S_n - S_m| < \epsilon$.

כל $\epsilon > 0 \exists N$ כך שלכל $N < n < m$, $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \epsilon$.

• $|a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m|$, also gilt es, dass
 in Bsp. w.o. $\in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Bsp. w.o. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (Leibniz)
 • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (Bsp. w.o.)

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine Reihe, die man hier

hier wiederfindet:

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ist eine Reihe, die man hier
 • $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ ist eine Reihe, die man hier

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ ist eine Reihe, die man hier
 • $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$ ist eine Reihe, die man hier

• $|a_n| \leq |a_{n-1}| \cdot r = |a_1| \cdot r^{n-1}$
 $|a_2| \leq |a_1| \cdot r$
 $|a_3| \leq |a_2| \cdot r \leq |a_1| \cdot r^2$

• $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ ist eine Reihe, die man hier

• $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist eine Reihe, die man hier

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist eine Reihe, die man hier