

קריטריון: $(x_n)_{n=1}^\infty$ סדרה מתכנסת:

$$\text{כל } \epsilon > 0, \exists N \text{ כזה ש- } |x_n - x_m| < \epsilon \text{ לכל } n, m > N$$

הוכחה: נראה שהסדרה היא סדרה קושי.

אם n, m מספיק גדולים אז

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq$$

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{2}{2^n} < \epsilon \text{ עבור } n \text{ מספיק גדול}$$

$$x_n - x_m = 0 \text{ אם } n = m, \text{ כל } n, m > N$$

$$|x_n - x_m| \leq \frac{2}{2^n} < \frac{2}{2^N} < \epsilon \text{ אם } N < n < m$$

לפיכך, סדרה קושי, כלומר $x_n \rightarrow x$.

יחס שקילות

יחס $\sim$ על קבוצת A הוא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

$$[x] = \text{הקלאסה השקולה של } x = \{y : y \sim x\}$$

$$A/\sim = \{[a] : a \in A\} \text{ אם } \sim \text{ יחס שקילות על } A$$

במקרה $A = \mathbb{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים, יחס שקילות זה מתאים לשיעור.

כלומר, ב- $\mathbb{Q}$ הסדרה $(q_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת אם ורק אם $\epsilon = \frac{1}{M}$, $M \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

כלומר, $|q_m - q_n| < \epsilon$, n, m מספיק גדולים.

במקרה $A = \mathbb{R}$ יחס שקילות זה מתאים לשיעור, כלומר $x_n - y_n \rightarrow 0$ אם $(x_n)_{n=1}^\infty$ ו- $(y_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסות לאותו הגבול.

כלומר, $|x_n - y_n| < \epsilon$ עבור $n > N$, $M \in \mathbb{N}$, $\epsilon = \frac{1}{M}$.

$$R = A/\sim \text{ קבוצת}$$

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$$

כלומר, R קבוצת המספרים

$$(1) : (x_n + y_n) \text{ סדרה קושי}$$

$$(2) : \text{הסדרה } (x_n) \text{ מתכנסת}$$

$$1 \dots \text{כלומר, אם } [(x_n)] = [(\tilde{x}_n)], [(y_n)] = [(\tilde{y}_n)] \text{ אז } [(x_n + y_n)] = [(\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)]$$

$$[(x_n + y_n)] = [(x_n) + (y_n)] \dots$$

$$[(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n y_n)] \quad \text{בגלל אס.י.}$$

$$[(x_n)] > [(y_n)] \text{ אם } x_n > y_n \text{ כמעט בל } n \text{ ואם } [(x_n)] \neq [(y_n)]$$

גבול שלם ובלו גבול של סדרה.

משפט: לסדרה חסומה יש בל חלקי מקסימלי ובל חלקי מינימלי.

הוכחה: גבול $\sup (x_n)$ סדרה חסומה. כלומר, $a \leq x_n \leq b$ בל n .

$$A = \{ L \mid \text{בל } L \text{ חלקי } (x_n) \}$$

אם A ריקה, לפי משפט בינום-וירסטראס.

A חסומה, כי בל L חלקי (x_n) היא גם בקט $[a, b]$.

$$L = \sup A \quad \text{לכן, } A \text{ יש להם גבול. נסמני}$$

נניח $L \in A$, כלומר L גבול חלקי (x_n) .

נבחר סדרה מסדרה (y_n) כזו: בל n , נבחר $y_n \in A$.

$$\text{הנקים } y_n \geq L - \frac{1}{n}.$$

L היא חסם תחת A , לכן בל n , $L - \frac{1}{n} \leq y_n \leq L$.

ע"י משפט הסנדוויץ', $y_n \rightarrow L$.

ע"י המשפט שבוחת, מכיון של y_n בל חלקי (x_n) , גם

$$L = \lim y_n \text{ בל חלקי } (x_n).$$

ו- L הוא $\leq$ גבול חלקי אחר של (x_n) , כי L חסם

תחת A , לכן L גבול חלקי מקסימלי.

הערה: עבור סדרה (x_n) חסומה, הבל המקסימלי נקרא

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k \quad \text{ה"בול העליון של הסדרה, ומסומן ע"י}$$

הבל החלקי המינימלי נקרא ה"בול התחתון של הסדרה

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k \quad \text{ומסומן ע"י}$$

$\{1, -1\}$ - סדרת האינסוף $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ (1) - נכון

$\lim a_n = \lim a_n = \lim a_n$ - נכון (2) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ - סדרת האינסוף

$\lim (a_n + b_n) \leq \lim a_n + \lim b_n$, נכון (1) $(a_n), (b_n)$ - סדרות

$\lim (c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$, $c > 0$ נכון (2)

$\lim (c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$, $c < 0$ נכון

$\lim a_n \leq \lim b_n$, $a_n \leq b_n$ נכון (3)

on $\lim a_n < c$, $a_n < c$, $c > \lim a_n$ נכון (4)

כוכבים: (1) $\lim (a_n + b_n)$ - נכון $(a_n + b_n)$ - סדרת האינסוף

לפי ישר $(a_{n_k} + b_{n_k})$ - סדרת האינסוף

$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ - סדרת האינסוף, a_{n_k} - סדרת האינסוף

$$b_{n_k} = (a_{n_k} + b_{n_k}) - a_{n_k}$$

$a_{n_k} + b_{n_k}$ - סדרת האינסוף
לפי ישר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n_k} + b_{n_k}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(2) a - נכון $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ - סדרת האינסוף

$$\{L \mid (c \cdot x_n) \in L\} = c \cdot \{L \mid (x_n) \in L\}$$

$$c > 0 \Rightarrow \lim c \cdot x_n = \sup \{L \mid (c \cdot x_n) \in L\} = \sup c \cdot \{L \mid (x_n) \in L\} =$$

$$= c \cdot \lim x_n$$

$$c < 0 \Rightarrow \lim c \cdot x_n = \sup \{...\} = \sup \{...\} = c \cdot \inf \{L \mid (x_n) \in L\} =$$

$$= c \cdot \lim x_n$$

(3) $\lim a_n - p$ - סדרת האינסוף $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ - סדרת האינסוף

לפי ישר (b_{n_k}) - סדרת האינסוף

... (b_{n_k}) - סדרת האינסוף

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_{k_l}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n_{k_l}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \dots$$

$a_n \geq c$ עבור n מספיק גדול (4)

כל $a_{n_k} \geq c$ כל $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנס ל- L

$(a_{n_{k_l}})$ מתכנס ל- L , ולכן $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

$L \geq c$ כל, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k}$: נניח

לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ - כלומר, $L > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ כל

המשפט הראשון.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \left\{ c : \text{עבור } c > x_n \text{ } n \text{ כל} \right\}, \text{ כל } x_n \text{ מתכנס}$$

$$A = \left\{ c : \text{עבור } c > x_n \text{ } n \text{ כל} \right\} \text{ קבוצת המספרים}$$

(1) נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ כל A

n כל $c > x_n$ כל, $c \in A$ כל

נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq c$ כל

נניח, במקרה הראשון, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > c$ כל

כל $x_n > c$ כל, ולכן $x_n > c$ עבור n מספיק גדול.

כל $c > x_n$ כל n כל

(2) נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ כל A

$d \in A$ כל, נבחר $\epsilon > 0$, $c > d > \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ כל, $c > \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ כל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A = \inf \left\{ c : \text{עבור } c > x_n \text{ } n \text{ כל} \right\}, \text{ כל } c \in A \text{ כל}$$

$$a_n \rightarrow 0 \text{ כל } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \text{ כל } c > 0$$

המשפט הראשון

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

lim, lim, lim

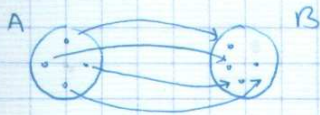
lim, lim, lim

lim, lim, lim

פונקציה

פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא פונקציה הנקראת f אם $a \in A$ ואם $f(a) \in B$.

$a \xrightarrow{f} b = f(a)$ פונקציה f היא פונקציה אם $a \in A$ ואם $f(a) \in B$.



A נקראת תחום הפונקציה.

B נקראת אזור הפונקציה.

$$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

פונקציה חד-חד.

$$\forall b \in B \exists a \in A, f(a) = b$$

פונקציה סל.

f נקראת "פונקציה ממשית" אם $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

דוגמה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ פונקציה חד-חד כי $f(1) = 1, f(-1) = 1$.

פונקציה סל כי $f(x) \geq 0$ לכל x , ולכן x בקבוצה $f(x) = -1$.

פונקציה חד-חד $f(x) = x^2, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

פונקציה סל $f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$.

פונקציה סל $f(x) = x^2, f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

פונקציה ממשית

פונקציה ממשית: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

פונקציה רציונלית = פונקציה ממשית $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (פולינומים P, Q).

שומר $Q(x) \neq 0$.

פונקציה ממשית $f(x) = |x|$.

פונקציה ממשית $f(x) = [x]$.

פונקציה ממשית $f(x) = \sin x, \cos x$ אינן ממשיות, אינן פונקציות.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos x = \cos(-x)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

הרכבת פונקציות:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$g \circ f: A \rightarrow C \quad \text{אם} \quad f: A \rightarrow B \quad \text{אם} \quad g: B \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

6.9.10

סביבה של פונקציה:

השדה: סביבה של x_0 היא קבוצת הסביבה $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

(Neighborhood)

כאשר δ חיובי.

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x: |x - x_0| < \delta\}$$

סביבה מוקטנת של x_0 היא קבוצת הסביבה $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$

$$= \{x: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, x \neq x_0\} = \{x: 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

$$N_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$N_\delta^*(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

באמצעות: אם f פונקציה המאפיינת סביבה מוקטנת של x_0 .לומר ש- $f(x)$ שואף ל- L , כאשר x שואף ל- x_0 , ונסמן:

$$x \in N_\delta^*(x_0) \quad \text{אם} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{כך} \quad \forall x \in N_\delta^*(x_0) \quad f(x) \in N_\epsilon(L)$$

$$f(x) \in N_\epsilon(L) \quad \text{לפיכך,}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\text{אם} \quad f(x) \rightarrow L \quad \text{כאשר} \quad x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \quad \text{כך} \quad \text{אם} \quad \delta > 0 \quad \text{אז} \quad x^2 \rightarrow 4 \quad \text{כאשר} \quad x \rightarrow 2 \quad (1)$$

$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon \quad \text{לפיכך}$$

$$4 - \epsilon < x^2 \quad \text{אם} \quad \delta > 0 \quad \text{אז} \quad x^2 \rightarrow 4 \quad \text{כאשר} \quad x \rightarrow 2$$

$$(2 - \delta)^2 \geq 4 - \epsilon, \quad (2 + \delta)^2 \leq 4 + \epsilon$$

$$\sqrt{4 - \epsilon} \leq 2 - \delta \leq 2 + \delta \leq \sqrt{4 + \epsilon} \quad \text{אם} \quad \delta > 0$$

$$\delta = \min(\sqrt{4 + \epsilon} - 2, 2 - \sqrt{4 - \epsilon}) > 0.$$

7

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

אם δ הוא מספר חיובי, אז

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$