

כדי נניח $n \geq 1$ ו- $g(x) = f'(x)$, נבדוק ש

$$g'(x_0) = \dots = g^{(n-2)}(x_0) = 0 \quad g^{(n-1)}(x_0) > 0$$

ו- n , לפי δ נקבל $x \in B_\delta(x_0)$, $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$f'(x) > 0 \quad \text{לפי} \quad g(x) > g(x_0) = 0$$

לפי $f(x) > f(x_0)$, לפי $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ - δ נבחר

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ בל} \quad f(x) < f(x_0) \quad , \quad x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ בל}$$

הצדקה (המשפט): יהי f פונקציה מתחום X_0 .

$$\text{נניח, } l(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) \quad (\text{המשפט})$$

נראה x_0 - e נקודה קיצונית של f אם f אינה סדורה ב-

$$f(x) < l(x) \iff x > x_0 \quad f(x) > l(x) \iff x < x_0$$

$$\text{אם נקבעים} \quad f(x) > l(x) \iff x > x_0 \quad f(x) < l(x) \iff x < x_0$$

משפט: יהי f פונקציה פשוטה ב- x_0 .

$$(1) \quad \text{אם } f''(x_0) > 0 \text{ , אז } f \text{ קעורה ב-} x_0$$

$$\text{אם } f''(x_0) < 0 \text{ , אז } f \text{ קעורה ב-} x_0$$

$$(2) \quad \text{אם } f''(x_0) \geq 0 \text{ אז } x_0 \text{ ב-} x_0 \text{ קעורה}$$

$$\text{אם } f''(x_0) \leq 0 \text{ אז } x_0 \text{ ב-} x_0 \text{ קעורה}$$

$$(3) \quad \text{אם } f''(x_0) = 0 \text{ , ו-} f'' \text{ מתחלפת סימן ב-} x_0 \text{ (כלומר, יש סביבה שבה}$$

באותה f'' חיובית ואחרת שלילית) אז x_0 נקודה

כיוונית של f .

$$[l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

$$g(x) = f(x) - l(x) \quad \text{פונקציה, נבדוק}$$

$$g(x_0) = 0 \quad g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \Rightarrow g'(x_0) = 0$$

$$g''(x_0) = f''(x_0) - l''(x_0) = f''(x_0)$$

$$(1) \quad g(x_0) = g'(x_0) = 0 \quad g''(x_0) = f''(x_0) > 0 \quad \text{ע"פ תנאי} \quad \text{ע"פ תנאי}$$

ע"פ תנאי הקורס, יש סביבה x_0 כך, $x \neq x_0$ כל

$$f(x) > l(x) \iff f(x) - l(x) > 0, \text{ לפי } g(x) > g(x_0) = 0.$$

$$(2) \quad \text{נניח } f \text{ ע"פ תנאי } x_0.$$

נניח השלילי - $f''(x_0) < 0$ אז לפי חלק 1, f קטורס ב- x_0 .

$$f(x) \text{ לא יכול להיות בקו } \sim \text{ (אז) וקטן יותר במחיצה}$$

$$\text{לכן, } f''(x_0) \geq 0.$$

$$(3) \quad \text{נניח } f \text{ ע"פ תנאי } x_0, \text{ ו- } f'(x_0) = 0, \text{ אז } f''(x_0) = 0.$$

$$g''(x) = f''(x), \quad g(x_0) = g'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0.$$

לפי זה g'' נחלפה סביב x_0 , לפי תנאי הקורס,

יש סביבה x_0 שבה f נחלפה סביב x_0 ובהחלפה

g נחלפה, לפי בחירה האחד $f(x) > l(x)$ ובהחלפה

$$f(x) < l(x), \text{ אז } x_0 \text{ נקודה בקו } f.$$

אזכור:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty \quad \text{או} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{ע"פ תנאי } x_0 \text{ נקודה}$$

הישר $x = x_0$ נקרא אסימטוטה אנכית לפונקציה f .

בנוסף, לפי, נניח $l(x) = ax + b$ נקרא אסימטוטה f ב-

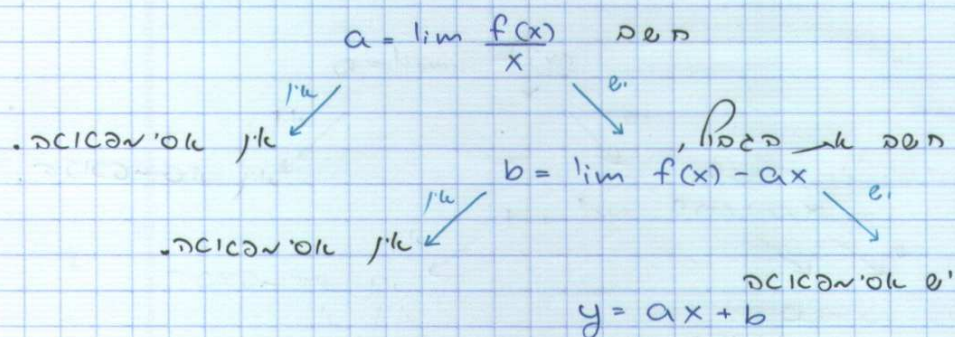
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - l(x) = 0 \quad \text{או} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - l(x) = 0$$

אזכור: $a \neq 0$ אסימטוטה $a = 0$ אסימטוטה

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0 \quad \text{או}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = 0 \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax, \text{ וכן כן,}$$



$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{8x + 7}$$

: המשפט

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{8x^2 + 7x} = \frac{1}{8}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \frac{1}{8}x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{8x + 7} - \frac{x}{8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 24x + 16 - 8x^2 - 7x}{8(8x + 7)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{17x + 16}{64x + 56} = \frac{17}{64}$$

$$y = \frac{1}{8}x + \frac{17}{64}$$

ל.ס. סדר גודל

. $x \rightarrow -\infty$ נשקף גם סדר גודל

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$y = x + \frac{1}{2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^2 - t} - t = \frac{1}{2}$$

$$(t = -x)$$

$$y = -x + \frac{1}{2}$$

, $0 \leq \lambda \leq 1$ GP של $[a, b]$ סדרה פונקציה f אז: $\odot$ סדרה
 $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$

$x_1, \dots, x_n \in I$, I סדרה פונקציה f אז: (א-יחידות) $\odot$ סדרה

של $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ אז $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1$ -1

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

הוכחה: באינדוקציה - $n=1$ ברור, $n=2$ הוכחה $\odot$ סדרה

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n\right) = \quad : n \geq 2$$

$$= f\left((1-\lambda_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) + \lambda_n x_n\right) \leq$$

$$\leq (1-\lambda_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) + \lambda_n f(x_n)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_n} = 1 \text{ -e } \rho_{\text{סדרה}}\right)$$

$$\leq (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i) + \lambda_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + \lambda_n f(x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

$$f(x) = \ln x \quad : \text{א-יחידות}$$

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln x_i$$

הוכחה באינדוקציה

$$\ln\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \geq \sum \frac{1}{n} \ln x_i$$

$$\lambda_i = \frac{1}{n} \quad \text{אז}$$

$$\ln \frac{\sum x_i}{n} \geq \frac{1}{n} \ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

הוכחה באינדוקציה (א-יחידות)

אם f, g פונקציות מוגדרות על $[a, b]$ אז

f, g מוגדרות על (a, b) אז

אם $g(b) \neq g(a)$ אז $x \in (a, b)$ GP $g'(x) \neq 0$!

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} \text{ -e } c \in (a, b)$$

הוכחה באינדוקציה $g(x) = x$ אז

הוכחה: $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(a) \neq 0$ - ע"כ $a \in (a,b)$ ע"י, $\exists$ תנאי c כזה ש-
 $g(b) \neq g(a)$, לפי.

נבנה את הפונקציה F :

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a))$$

F נמצאת ב- $[a,b]$, ו- (a,b) -

$$F(a) = 0 \quad F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(b)-g(a)) = 0$$

ע"כ $F'(c) = 0$ - ע"כ $c \in (a,b)$ ע"י, Rolle

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \quad (g'(c) \neq 0)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

פ.א.פ. 13

נניח: f, g פונקציות המוגדרות במסגרת הנקודה 1, ו- a נקודה:

(א) $g'(x) \neq 0$ לכל $x \neq a$ במסגרת.

(ב) $f(x) \rightarrow 0$ ו- $g(x) \rightarrow 0$ כ- $x \rightarrow a$.

(ג) f, g נגזרות במסגרת a .

אם $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ו- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים, אז:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ ו- } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

אם $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ו- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים, אז:

המקרה $\frac{f}{g}$ ו- $\frac{f'}{g'}$ זהה, ו- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

כאשר $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \infty$ כ- $x \rightarrow a$.

הוכחה: נניח $f(a) = g(a) = 0$, לפי f, g נגזרות ב- a .

נבנה פונקציה F כדלהלן. $\forall x \neq a$ במסגרת, $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ לפי משוואת הממוצע.

כאשר $a < c_x < x$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

ע"כ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.

4.10.10

1 מיליון

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הכלל

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 2}{3x^2 - 2x} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

הכלל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x^{\ln x} \\ f(x) = (\tan x)^{\ln x} \\ \ln f(x) = \ln x \cdot \ln \tan x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty \\ f(x) = e^{\ln f(x)} \rightarrow \infty \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{l} \ln x \rightarrow -\infty \\ \ln \tan x \rightarrow -\infty \end{array} \right)$$

$$\ln a^b = b \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^{\ln x} \quad f(x) = \cos x^{\ln x} \\ \ln f(x) = \ln x \cdot \ln \cos x = \frac{\ln \cos x}{1/\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x \ln^2 x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot x^2 \ln^2 x \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \right)$$

$$\ln f(x) \rightarrow 0 \quad f(x) = e^{\ln f(x)} \rightarrow 1$$

: הכלל - הכלל B

$g'(x) \neq 0$, $(a, b]$, f, g פונקציות

חסומות , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

הכלל B , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

הוכחה: נניח $k \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

$a < x < x_0$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $a < x_0 \leq b$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

$$(a, x_0) \text{ - } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - k \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$c = c_x$, $a < x < x_0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$

$$(a < x < c < x_0) \quad \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$k - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} < k + \frac{\epsilon}{2}$$

הכלל

4.10.10

1 נוסח

$$k - \frac{\varepsilon}{2} < \underbrace{\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}}_{h(x)} < k + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right) + \frac{f(x_0)}{g(x)}$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| = \left| [h(x) - k] \cdot \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] - k \left[\frac{g(x_0)}{g(x)} \right] + \frac{f(x_0)}{g(x)} \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| + \left| k \cdot \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x_0)}{g(x)} \right| \rightarrow \frac{\varepsilon}{2}$$

$x \rightarrow \infty$ נוסח לוביט

אם f, g פונקציות מוגדרות על $[a, \infty)$, $a > 0$, ו- $g'(x) \neq 0$ אז

אם $g(x) \rightarrow \infty$ ו- $f(x) \rightarrow L$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$!
אם $g(x) \rightarrow 0$ ו- $f(x) \rightarrow \infty$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$!

לוביט: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

הוכחה: נגדיר $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ ו- $F(x), G(x)$ מוגדרות על $(0, \frac{1}{a}]$

אם $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = k$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0$$

אם $f(x), g(x) \rightarrow 0$ אז לוביט

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{\left[f\left(\frac{1}{x}\right) \right]'}{\left[g\left(\frac{1}{x}\right) \right]'} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} k$$

אם $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k$ אז $\frac{F(x)}{G(x)} \rightarrow k$ ו- $F(x), G(x)$ מוגדרות על $(0, \frac{1}{a}]$

אם $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k$ אז

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

הוכחה: לוביט

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \left(\text{לוביט: } -\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x} \right)$$