

... $0.a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$ נמצא בסדר B

$$a_{n+1} < 10^{n+1} (x - 0.a_1 \dots a_n) < a_{n+1} + 1$$

...

$$\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < x - 0.a_1 \dots a_n < \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$0.a_1 \dots a_{n+1} < x < 0.a_1 \dots a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$0.a_1 \dots a_{n+1} < x < 0.a_1 \dots a_n + \frac{1}{10^n} \quad \text{מכאן } -$$

$$\blacksquare x = \lim 0.a_1 \dots a_n = 0.a_1 a_2 a_3 \dots \quad \text{הערות: פשוט, ברור}$$

, n בל $(d_i)_{i=0}^\infty$ נמצא בסדר B : $0.d_1 d_2 d_3 \dots$

$$0.d_1 \dots d_n \leq 0.d_1 d_2 d_3 \dots \leq 0.d_1 \dots d_n + \frac{1}{10^n}$$

$$0.d_1 d_2 d_3 \dots \leq 0.d_1 d_2 \dots d_n 999 \dots = 0.d_1 \dots d_n + \frac{1}{10^n} \quad \text{הוכחה:}$$

$$0.d_1 \dots d_n \leq 0.d_1 d_2 \dots \quad \text{כל } (0.d_1 \dots d_n)_{n=1}^\infty \text{ נמצא בסדר } B, \text{ כל } n$$

הערות: $0.d_1 d_2 d_3 \dots$ נמצא בסדר B וכן $0.e_1 e_2 e_3 \dots$

$$d_{n+1} = d_{n+2} = \dots = 9 \quad \text{כל } d_{n+1} = d_{n+2} = \dots = 0$$

$$0.d_1 d_2 d_3 \dots = 0.e_1 e_2 e_3 \dots \quad \text{כל } 0.d_1 d_2 d_3 \dots = 0.e_1 e_2 e_3 \dots$$

$$\text{כל } a_n \neq 9, \quad 0.a_1 a_2 a_3 \dots a_n 999 \dots \text{ נמצא בסדר } B$$

$$(i \text{ בל } d_i = e_i \text{ כל }) \quad 0.a_1 \dots a_{n-1} (a_n + 1) 000 \dots$$

$$d_i \neq e_i \quad \text{הוכחה: } 0.d_1 d_2 \dots d_{i-1} d_i 000 \dots < 0.d_1 d_2 \dots d_{i-1} (d_i + 1) 000 \dots < 0.e_1 e_2 \dots e_{i-1} e_i 000 \dots < 0.e_1 e_2 \dots e_{i-1} (e_i + 1) 000 \dots$$

$$0.d_1 d_2 \dots \leq 0.d_1 \dots d_{n-1} (d_n + 1) 000 \dots \leq 0.e_1 \dots e_{n-1} e_n 000 \dots \leq 0.e_1 \dots e_{n-1} (e_n + 1) 000 \dots$$

$$\text{כל } 0.d_1 d_2 \dots = 0.e_1 e_2 e_3 \dots \quad \text{כל } 0.d_1 d_2 \dots = 0.e_1 e_2 e_3 \dots$$

$$d_{n+1} = d_{n+2} = \dots = 9, \quad e_{n+1} = e_{n+2} = \dots = 0 \quad \text{הערות: פשוט, ברור}$$

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

הוכחה:

$$1, 2, 1.5 = \frac{3}{2}, 1.66 = \frac{5}{3}, 1.6 = \frac{8}{5}$$

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{הוכחה:}$$

$$a_1 = \frac{1}{1} = \frac{F_2}{F_1} \quad \text{הוכחה: } a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \Rightarrow a_{n+1} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

$$1 \quad a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \Rightarrow a_{n+1} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

א, $a_3, a_5, \dots$ מספרים: $(a_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ רצף

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = 1 + \frac{a_n}{a_n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$$

$a_n < \varphi$ ולכן n בל (ϵ) ימצא

בל $(a_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ מספרים (ב)

$$a_{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi \quad (c)$$

$$a_n < \varphi \Rightarrow 1 + \frac{1}{a_n} > 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \Rightarrow a_{n+1} > \varphi \quad (\text{הוכחה: } (d))$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

(ד) $a_{n+2} > a_n$ ולכן n ימצא

$$a_{n+2} > a_n \Leftrightarrow \frac{2a_n+1}{a_n+1} > a_n \Leftrightarrow 2a_n+1 > a_n(a_n+1) \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow a_n < \varphi$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} \quad : \text{מספרים } (a_{2n-1})_{n=1}^{\infty} \text{ בל } (c)$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_{2n-1}+1}{a_{2n-1}+1} = \frac{2L+1}{L+1}$$

$L \geq 0$, n בל $a_{2n+1} > 0$ ולכן

$$L = \frac{2L+1}{L+1} \Rightarrow L^2 + L = 2L + 1 \Rightarrow L^2 = L + 1 \Rightarrow L = \varphi$$

מאחר ש a_n יורד, נמצא

בל $a_{2n} > \varphi$, $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ יורד, ולכן φ - פ

אם $a_n \rightarrow L$ אז $a_{2n} \rightarrow L$ וכן $a_{2n-1} \rightarrow L$ (משפט: אם $a_n \rightarrow L$ אז $a_{2n} \rightarrow L$ וכן $a_{2n-1} \rightarrow L$)

במרחב $\mathbb{R}$ קטע: $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קטעים סגורים, $I_n = [a_n, b_n]$

כך ש $I_n \supset I_{n+1}$

$$I_n \supset I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \quad : \text{הקטעים סגורים}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0 \quad : \text{אורך הקטעים שולף}$$

2. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$, ויציב $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (משפט)

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] - e$ מו, n בל: מוכח
 $a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$
 . שם מו $(a_n)^\#$, pl
 . שם מו $(b_n)^\#$
 . מו מו מו מו #

. מו $(b_n) - 1$ (a_n) , pl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

. שם $a_n \Rightarrow x = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow x \geq a_n$. $x = \lim a_n = \lim b_n$, מו
 . n בל
 . שם $b_n \Rightarrow x = \inf \{b_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow x \leq b_n$. $a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow x \in [a_n, b_n]$
 . n בל

. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, pl

$$a_n \leq y \leq b_n \quad \forall n$$

$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ - e מו, מו

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

. מו מו מו מו

. $0 < x < y$ מו מו מו

$a_1 = x$, $b_1 = y$: מו מו $[a_n, b_n]$ מו מו מו

$$a_n \leq a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \leq b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$b_n - a_n \rightarrow 0 \iff 0 < \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n} \leq \frac{1}{2}, n \text{ בל, pl}$$

. שם $[a_n, b_n]$ מו מו מו מו

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = a_n \cdot b_n = \dots = a_1 \cdot b_1 = xy, \forall n$$

$$L^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} xy = xy \Rightarrow L = \sqrt{xy}$$

מספרים

הערה: סדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת סדרה $\sim$ סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם
 קיימת סדרה מספרים אצט"ח $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך $n_{k+1} > n_k - \varepsilon$ ו-
 (כלומר, סדרה האינסופית של ε) ו- $b_k = a_{n_k}$ כל k ו- $\varepsilon > 0$.
 כלומר, סדרה $\sim$ סדרה היא סדרה חוזרת $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

דוגמאות: $a_n = \frac{1}{n}$. הסדרה $\frac{1}{2n}$ $\sim$ סדרה $(n_k = 2k)$

" $\frac{1}{n^2}$ " $\sim$ " $(n_k = k^2)$

סדרה $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ $\sim$ סדרה.

" $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ " $\sim$ " -

$a_n = (-1)^n$ (ב) $b_n \sim$ סדרה a_n

$b_n = (-1)^{n+1}$ $a_n \sim$ סדרה b_n $(a_n = b_{n+1})$

מספרים $\sim$ סדרה:

אם (a_n) סדרה, $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ סדרה (n_k)

$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty} \sim (a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ (n_k) סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

משפט: אם $a_n \rightarrow L$ אז $b_n \sim$ סדרה (a_n) מתכנסת ל- L .

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

סוכתה: $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty} \sim$ סדרה.

$n_1 \geq 1$

יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך $n > N$ $b_n \sim$ סדרה.

$n_2 \geq n_1 + 1 \Rightarrow n_2 \geq 2$

$|a_n - L| < \varepsilon$

$n_3 \geq n_2 + 1 \Rightarrow n_3 \geq 3$

$\forall n > N \quad n_n \geq n > N$

$n_n \geq n$

$\Rightarrow |a_{n_n} - L| < \varepsilon$ ■

$\lim \left(1 + \frac{1}{n^{n+1}}\right)^{n^{n+1}} = e$

דוגמאות:

$(1 + \frac{1}{n})^n$ סדרה $\sim$ סדרה $\sim$ סדרה

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

קונצרט!

הסדרה a_n אינה מתכנסת, כי היא אינה חסומה, נניח $a_n \rightarrow L$.

$$\begin{aligned} \text{אם } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 0 & \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 2 \end{aligned}$$

משפט: אם $a_n \rightarrow \infty$ או $a_n \rightarrow -\infty$ אז a_n אינו סדרה מתכנסת.
 אם $a_n \rightarrow \infty$ או $a_n \rightarrow -\infty$ אז a_n אינו סדרה מתכנסת.

משפט בינ-זמן-וירטואלי: סדרה מתכנסת a_n מתכנסת ל- L אם ורק אם $a_n \rightarrow L$.

הוכחה: נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .
 נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .
 נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

אם $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .

$$\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right], \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right]$$

נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .
 נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .

נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .

נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .

$$b_n - a_n = \frac{1}{2} (b_n - a_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

וכן, $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$$

נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה כי a_n מתכנסת ל- L .

$$x_{n_k} = [a_{n_k}, b_{n_k}] \quad \text{אם } n_k \rightarrow \infty$$

$$n_{k+1} > n_k$$

נבדוק: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ באופן אינדוקטיבי: $x_1 \in [a, b]$ $n=1$

אם כבר בחרנו את x_n , נבחר $x_{n+1} < x_n$ כזה ש- $x_{n+1} \in I_{n+1}$.

קיים x_{n+1} כזה כי הקטע I_{n+1} יש איברים מדויקת x עבור אינפימום סדרה של x .

$$BP \text{ א נקיים } a_n \leq x_n \leq b_n \text{ ונבחר } x_{n+1} \rightarrow x \text{ לבן, } x_{n+1} \rightarrow x$$

משפט: אם (x_n) אינו חסומה לסיף, אז $(x_n) - P$ סדרה עולה לסיף.

אם (x_n) אינו חסומה לסיף, אז $(x_n) - P$ סדרה עולה לסיף.

הוכחה: BP סדרה, יש לה סדרה עולה לסיף בהתאם.

הוכחה: נניח (x_n) אינו חסומה לסיף. ונבחר (x_n) סדרה עולה לסיף.

כך-ע $x_n \geq k$ BP u :

נבחר u כך-ע $x_n \geq u$. אם בחרנו את x_n , נבחר $x_{n+1} > x_n$ כזה ש- $x_{n+1} \geq u$.

(אפשרי כי לא חסומה לסיף). $x_n \rightarrow \infty$ $u \rightarrow \infty$ $\Rightarrow x_{n+1} \rightarrow \infty$

הערה: אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נבחר L נקרא את חסומה לסיף, סדרה.

אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה לסיף L .

אנחנו: L היא את חסומה לסיף $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, אם BP $\epsilon > 0$, נקיים $|x_n - L| < \epsilon$

עבור אינפימום סדרה של x .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N > n \quad |x_N - L| < \epsilon$$

הוכחה: נניח L היא את חסומה לסיף (x_n) , נבחר (x_n) סדרה עולה לסיף.

$L - P$. BP $\epsilon > 0$, קיים k כך-ע $|x_n - L| < \epsilon$ $\forall n > k$.

לבן, $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ נבחר את הקטע $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

$\Rightarrow$ קיים סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה לסיף (x_n) כך-ע $|x_n - L| < \frac{1}{n}$.

נבחר u כך-ע $|x_n - L| < u$ (אינפימום, נבחר את BP L , בסיף).

6 x_n קיים $x_{n+1} < x_n$ $|x_{n+1} - L| < \frac{1}{n+1}$ נבחר את x .

$$L - \frac{1}{n} < x_{n_k} < L + \frac{1}{n} \xRightarrow{\text{עם הנדון}} x_{n_k} \rightarrow L$$

קריאה: לסדרה של מספר ממשי היא סדרה חלקי.

(אזכור סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$) של המספרים הרציונליים מובנים הם.

אנחנו: $B \in \mathbb{R}$ היא סדרה חלקי לסדרה.

חוכמה: לכל $\varepsilon > 0$, יש אינדקס N כזה ש- $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

ואכן יש אינדקס N הסדרה בקצה.

1.9.10

משפט: אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה $(x_{m_n})_{n=1}^{\infty} \rightarrow (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ סדרה

המכוסה $M = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ (כלומר, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$).

אם קבוצת המספרים $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא האיחוד של קבוצת המספרים

החלקים $(x_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ ו- $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

חוכמה: (א) B סדרה חלקי $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה חלקי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

כי אם L סדרה חלקי $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ אז יש סדרה $(x_{m_n})_{n=1}^{\infty}$

המכוסה L . וזהו גם סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

(ב) B סדרה חלקי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חלקי $(x_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ או $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

כי אם L סדרה חלקי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ אז יש סדרה $x_{t_n} \rightarrow L$

$\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ לפי הסדרה $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$

מכאן t_n עבור אינדקס n נקרא t_n (כל המספרים הנתונים)

$\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא כולל.

← יש סדרה $(t_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ של $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $t_{n_k} \in \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $t_{n_k} \rightarrow L$.

← $(t_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ סדרה $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

ואכן L היא סדרה חלקי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

קריאה: קבוצת המספרים $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא $\{-1, 1\}$.