

3. קבוצות חסומות

היה $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה, $c \in \mathbb{R}$.
נאמר ש- c היא "חסם על" A אם $a \leq c, \forall a \in A$.
(כלומר, $\{c\} \geq A$)

אם A יש חסם על אז A נקראת "חסומה על".
כ"חם קטן" A אם $a \leq c, \forall a \in A$. $c \leq A$.
($\{c\} \leq A$)
אם יש A חסם קטן, A נקראת "חסומה קטן".
קבוצה נקראת חסומה אם היא חסומה על וחסומה קטן.

דוגמאות:

(א) M חסומה קטן כי $\{-2\} \leq M$.

אבל A חסומה על, כי אם $c \in \mathbb{R}$ כל, אז c אינו חסם על M .
(ב) $\mathbb{Z}$ אינו חסומה על ואינו חסומה קטן.

A היא חסומה $\Leftrightarrow$ קיימים c_1, c_2 כך $a \in A$ $\Rightarrow c_1 \leq a \leq c_2$.

$\Leftrightarrow$ קיים M כך $a \in A$ $\Rightarrow |a| \leq M$.

מכאן: אם קיים M כך $a \in A$ $\Rightarrow |a| \leq M$, אז $-M \leq a \leq M$.

בכיוון ההפוך, אם יש c_1, c_2 כך $a \in A$ $\Rightarrow c_1 \leq a \leq c_2$, נגדיר

$M = \max(|c_1|, |c_2|)$
 $a \in A$ $\Rightarrow |a| \leq M$

$-a \leq -c_1 \leq |c_1|$

$|a| = \max(a, -a) \leq \max(|c_1|, |c_2|)$

לכן, סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא חסומה אם קיימת M כך $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ חסומה.

נאמר שהסדרה (a_n) חסומה / קטנה / גדולה אם קיימת חסומה / חסומה קטנה / חסומה גדולה.

$\Leftrightarrow$ קיימת M כך $\{ \frac{n^2}{n^2+5} : n \in \mathbb{N} \}$ חסומה, כי הסדרה $\frac{n^2}{n^2+5}$ חסומה.
לכן חסומה.

תכונות של קבוצות:

אם $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ נאמר a הוא תחתית של A אם:
(א) $a \in A$.

(ב) $x \in A$, $a \geq x$ (כלומר, a הוא חסר של A).

דוגמה: אם $A = [0, 1]$ הוא קטע, אז 0 הוא תחתית.

התכונה של a_1, a_2 להיות תחתיות של A .

$$a_1 = a_2 \Leftrightarrow \begin{aligned} a_2 \geq a_1 &\Leftarrow \{a_2\} \geq A, a_1 \in A \\ a_1 \geq a_2 &\Leftarrow \{a_1\} \geq A, a_2 \in A \end{aligned}$$

אם a הוא תחתית של A , אז $\max A$ הוא a .

$$\left[\begin{array}{l} \text{כלומר, אם } a \text{ הוא תחתית של } A \text{ אז:} \\ a \in A \quad (\text{א}) \\ a \text{ הוא חסר של } A \quad (\text{ב}) \\ \text{אם קיים, אז הוא יחיד} \quad \min A \end{array} \right]$$

דוגמה:

(א) אם A קבוצה סגורה, אז A הוא תחתית של A .

$$A = \{x(1-x) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$\max A = \frac{1}{4} \quad (\text{ב})$$

התכונה: אם $x \leq 0$ ו- $x \geq 1$ אז $x(1-x) \leq 0$.

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x+(1-x)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{אם } 0 < x < 1$$

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, x \in \mathbb{R} \quad \text{כלל}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \in A, \text{ כלומר } \frac{1}{4} \text{ הוא חסר של } A$$

$$x(1-x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

דוגמה: $A = [0, 1]$ הוא תחתית.

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

אפשר: אם A יש מקסימום אז A חסום ולכן

אם A יש מינימום אז A חסום ולכן

בינתיים אם יש מקסימום A אז $\max A$ הוא מסתבר לכן A .

... מקבוצת $A = \{x(1-x) : x \in \mathbb{R}\}$ אינך חסום למעלה, כי יש לך קבוצת

$B = \{n(1-n) : n \in \mathbb{N}\}$ שאינה חסומה למעלה, כי

$-n^2 \cdot (1 - \frac{1}{n}) = n(1-n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ ונמצא פשוט $-\infty$ אינך חסומה למעלה.

דוגמה לקבוצת חסומה ללא סף מינימום:

$A = \{x : x > 0\}$ חסומה למעלה (ע"י 1) אבל

אין מינימום כי אם x היה מינימום לכן $x \in A$ אז $x > 0$

אבל $\frac{x}{2} < x$ ואם $\frac{x}{2} \in A$

סותר לכן x הוא מסתבר לכן A .

אפשר: ידוע $a < b$

$$\min [a, b] = a, \max [a, b] = b. \quad (א)$$

(ב) לקבוצת (a, b) אין מינימום או מקסימום.

בינתיים: נניח למשל $\max$.

(א) $b \in [a, b]$ לכן $x \in [a, b]$ מקיים $a \leq x \leq b$ ונמצא $x \leq b$

לכן $b = \max [a, b]$

(ב) נניח בלתי- x הוא מקסימום לכן (a, b) אז $a < x < b$

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{x+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b \Rightarrow \frac{x+b}{2} \in (a, b) \quad \frac{x+b}{2} > x$$

סותר.

מכיוון קבוצת A , נגזיר

• $\min A = -\max(-A)$, אם $\sim$ אז $\sim$ וכן

פונקציה של A - ρ ו- ρ זוגי, $C = \min A$

$$-c \in -A, \forall a \in A \quad -c \geq -a \Rightarrow \forall b \in -A, -c \geq b$$

• -c (12) 1000 e. -A 1000

14

$$\min(A) = -\max(-A)$$

השאלה: מהו A קבוע.

(Supremum) A בליון סוף ד קרא ד סוף

מש C הוא בתוספת הקו A

(אם A -פסם שליון אז הוא יחיד, כי הוא מופיע כחברים

(. P. 62 חס"ס מקיצי

$\sup A$ is the least upper bound, $\rho \in A$ is

$$\sup A = \min \{ c : A \subseteq [0, c] \}$$

1. $\frac{1}{2} \times 10 = 5$

$\sup A = \max A$, כאשר b הוא הסופריום של A (12)

A BBL von a sk. $a = \max A$, μ_0 , μ_0

$a \leq c$, $a \in A$ - זה ממש שכן, A ב $\mathcal{P}(B)$ וזה c נוב

• In der Bk von $a = \max A$, p

א) $\sup(a,b) = b$ כיוון $a < b$.

קיבוצים: b חסר פולר ל (a,b) .

אם c חסר פולר ל (a,b) , נובע $c \leq b$.

אולם, $c < b$ וכן $\frac{a+b}{2} \in (a,b)$, לפי $\frac{a+b}{2} > a$.

לפי $c = \max(a,b)$ לפי $c \in (a,b)$, $a < c < b$.

משפט: (גבול חסר פולר)

כל קבוצה חסרת פולר היא חסרת פולר.

סיכום: אם A קבוצה חסרת פולר ולא ריקה.

$$B = \{c : \{c\} \geq A\} = \text{קבוצת החסמים של } A \text{ (אם ריקה)}$$

$$A \leq B \iff a \leq c, c \in B \text{ כל } a \in A$$

לפי סדר הקטנות של המסלול, קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$A \leq \{x\} \leq B$$

$$A \leq \{x\} \iff x \text{ חסר פולר ל } A$$

$$x = \sup A \iff x \leq b \text{ כל } b \text{ חסר פולר ל } A \iff \{x\} \leq B$$

משפט: (גבול אדמס)

כל $c \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > c$.

סיכום: נניח של $\mathbb{N}$ קיים $c \in \mathbb{R}$ שזוהי גבול n .

$$\{c\} \geq \mathbb{N}$$

אם n חסרת פולר, היא חסרת פולר לפי גבול חסר פולר.

$$n \leq L-1 \iff L = \sup \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n+1 \leq L$$

לפי $L-1$ חסרת פולר ל $\mathbb{N}$.

חסם גרמון = אינפ'מיום .

c נקרא חסם גרמון של A אם c הוא חסם לכל הנקודות של A .
מתקבל: $c = \inf A$, נשאל, $c = \inf A$.

גרמון חסם גרמון:

GP קבוצה חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה, יש חסם גרמון.

אנשים: $A - P$ יש חסם גרמון אם P יש חסם עליון.

$$\inf A = -\sup(-A), \text{ מתקבל גם מתקיים,}$$

כוכבים: נניח A יש חסם גרמון, אם A חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.

אכן $-A$ חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.

$$B = \{b : \{b\} \leq A\} \quad C = \{c : \{c\} \geq -A\}$$

$$\max B = \inf A$$

$$\min C = \sup(-A)$$

$$C = -B \text{ אנשים}$$

$$c \in -B \Rightarrow \exists b \in B, c = -b \text{ כוכבים:}$$

$$\forall a \in A \quad b \leq a \Rightarrow -b \geq -a \Rightarrow c \geq -a$$

$$\Rightarrow \{c\} \geq -A \Rightarrow c \in C$$

$$c \in C \Rightarrow \{c\} \geq -A \Rightarrow \forall a \in A \quad c \geq -a$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad -c \leq a \Rightarrow \{-c\} \leq A \Rightarrow -c \in B \Rightarrow c = -(-c) \in -B$$

$$\Rightarrow \inf A = \max B = \max(-C) = -\min C = -\sup(-A).$$

אנשים: (אינפ'מיום חסם גרמון)

נספר c הוא חסם גרמון של A אם ורק אם $\forall \epsilon > 0$ קיימת $a \in A$ כזו ש-

$$a \in A \text{ ו-} c \leq a$$

$$\epsilon > 0 \text{ GP (א) } a \in A \text{ ו-} a > c - \epsilon$$

דוכוחים: אם $C = \sup A$, ואם c מסתובב ב $\mathbb{R}$, $\epsilon > 0$,

$c - \epsilon$ איננו מסתובב ב A , ולכן קיים $a \in A$ כך ש- $a > c - \epsilon$.

ואם $d < c$, $\mathbb{R}$ הוא סגור תחת חיבור, ולכן $c - d > 0$, $\epsilon = c - d$, $\epsilon > 0$.

אז $a > c - \epsilon = d$, ולכן $a > d$, ולכן d איננו מסתובב ב A .

לכן $c - \epsilon = d$ ולכן $a > d$, ולכן d איננו מסתובב ב A .

הערה: עבור $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$.

אם A, B חסומים למעלה, אז $A+B$ חסום למעלה.

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

דוכוחים: נסמן $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$.

$$\{a\} \geq A, \{b\} \geq B$$

$$\Rightarrow \forall a \in A, b \in B \quad a+b \leq \alpha + \beta$$

לכן, $\alpha + \beta$ מסתובב ב $A+B$.

$$a > \alpha - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{כך ש-} a \in A \quad \epsilon > 0 \quad \text{כל}$$

$$b > \beta - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{כך ש-} b \in B$$

$$\Rightarrow a+b > \alpha + \beta - \epsilon$$

לכן, לפי איגון ההחסם העליון, $\sup(A+B) = \alpha + \beta = \sup A + \sup B$.

אם $C = \sup A$ ואם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה ב A , ויש סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-

$$x_n \rightarrow C, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in A$$

סדרה מונוטונית

הערה: סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ קרויה סדרה עולה אם כל $x_n \leq x_{n+1}$.

אם $x_n \leq x_{n+1}$ ו- $x_n < x_{n+1}$ בסדרה קרויה סדרה עולה ממש.

בסדרה קרויה יורדת אם כל $x_n \geq x_{n+1}$.

אם $x_n > x_{n+1}$ בסדרה קרויה יורדת ממש.

הסדרה נקראת מונוטונית אם היא עולה או יורדת.

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

הוכחה: נניח עבור סדרה עולה.

היה $(x_n)_{n=1}^\infty$ עולה וחסומה. יהי $L = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(קיים כי הסדרה חסומה). נניח ש- $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

כל $\epsilon > 0$, קיים n_0 כזה ש- $x_n > L - \epsilon$, עבור $n > n_0$. כלומר, $x_n > L - \epsilon$.

מקיים, $x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq x_{n_0+2} \leq \dots$

כלומר, $x_n \geq x_{n_0}$, $n \geq n_0$. כלומר, $x_n \geq L - \epsilon$.

$\Rightarrow \forall n > n_0 \quad L - \epsilon < x_n \leq L < L + \epsilon \Rightarrow L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$.

$x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ פונקציה: נניח סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ עולה:

אז $x_n < 2$, כלומר $x_n < 2$.

$x_n < 2$ מוכחה: $x_1 < 2$

$\Rightarrow 1+x_n < 3 \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} < \sqrt{3} < 2$

אז $x_n < 2$ מוכחה.

$x_1 < x_2$ מוכחה:

$x_n < x_{n+1} \Rightarrow 1+x_n < 1+x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$

$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \rightarrow x_{n+1}^2 = 1+x_n$ נניח $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = L^2 \quad L^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n) = 1+L$
 $L^2 - L - 1 = 0 \quad L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \dots$

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$ פונקציה:
 $= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n})$
 $< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$
 $\geq 2^{k-1}$

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right), \text{ בל}$$

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) > 2 + \sum_{k=2}^n \left(\text{המשקל הקודם}\right) = a_n, \text{ פה}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ נוס}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

"כוכב עשרוני"

$x_n \quad a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ רצף $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ספרה של ספרות

$$0.a_1 a_2 a_3 \dots$$

$$x_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = 0.a_1 a_2 a_3 \dots a_n \quad (\text{ספרה})$$

$$\frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} < \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \quad \text{על}$$

$$x_n = 0.a_1 \dots a_n \leq \underbrace{0.999\dots 9}_{n \text{ פעמים}} = \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^{n+1}} < 1 \quad (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ חסום}$$

$$0.a_1 a_2 a_3 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{פון, הסדרה יש גבול. נוס}$$

משפט: כל $0 \leq x \leq 1$ קיימת סדרה ספרות (a_n) כך ש- $x = 0.a_1 a_2 \dots$

הוכחה: אם x הוא ספר עשרוני סופי, סיימנו.

אחרת, נבחר n ספרות $(a_i)_{i=1}^n$ כך ש- n יתקיים:

$$0.a_1 a_2 \dots a_n < x < (0.a_1 a_2 \dots a_n)^+ 10^{-n}$$

$$\frac{a_1}{10} < x < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow a_1 < 10x < a_1 + 1 \quad \text{ספר } n=1: \text{ נבחר}$$

$$a_1 = [10x] \quad \text{בספר}$$

עם שמתקן בספר $a_1, \dots, a_n$ מתקיים:

$$0.a_1 \dots a_n < x < 0.a_1 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

$$0.a_1 \dots a_{n+1} < x < 0.a_1 \dots a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \quad \text{אם נבחר שיתקיים,}$$

$$0 < x - 0.a_1 \dots a_n < \frac{1}{10^n} \Rightarrow 0 < 10^{n+1}(x - 0.a_1 \dots a_n) < 10$$

$$a_{n+1} = [10^{n+1}(x - 0.a_1 \dots a_n)] \quad (\text{בספר})$$

$$a_{n+1} \in \{0, \dots, 9\} \Rightarrow 0 \leq a_{n+1} < 10$$