משפט צ'זארו: אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ אז $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \to L$

אם $a_n \to \infty$ אז $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \to \infty$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon/2$.

$$\forall n>N \quad \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_N+a_{N+1}+\dots+a_n}{n}$$

לכל $n>N$ $\quad L-\varepsilon/2 < a_n < L+\varepsilon/2$

$$L-\varepsilon/2 < a_{N+1} < L+\varepsilon/2$$
$$L-\varepsilon/2 < a_{N+2} < L+\varepsilon/2$$
$$\vdots$$
$$L-\varepsilon/2 < a_n < L+\varepsilon/2$$

$$(n-N)(L-\varepsilon/2) < a_{N+1}+a_{N+2}+\dots+a_n < (n-N)(L+\varepsilon/2)$$

$$\frac{(a_1+\dots+a_N)+(n-N)(L-\varepsilon/2)}{n} < \frac{a_1+\dots+a_N+a_{N+1}+\dots+a_n}{n} < \frac{(a_1+\dots+a_N)+(n-N)(L+\varepsilon/2)}{n}$$

נרשום $S=a_1+\dots+a_N$ (לא תלוי ב-n!)

$$\frac{S+(n-N)(L+\varepsilon/2)}{n} = \frac{S}{n}+\left(1-\frac{N}{n}\right)\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right) \to L+\frac{\varepsilon}{2} < L+\varepsilon$$

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} < \frac{S+(n-N)(L+\varepsilon/2)}{n} \to L+\frac{\varepsilon}{2} < L+\varepsilon$$

לכן, כמעט לכל n, $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} < L+\varepsilon$

כלומר קיים N_1 כך ש- $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} < L+\varepsilon$ $\quad n>N_1 \Rightarrow$

באותו אופן, קיים N_2 כך ש- $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} > L-\varepsilon$ $\quad n>N_2 \Rightarrow$

$$n>\max\{N_1,N_2\} \Rightarrow \left|\frac{a_1+\dots+a_n}{n}-L\right| < \varepsilon$$

נניח כעת ש- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. יהי $M>0$.

קיים N כך שלכל $n>N$ $\quad a_n > M+1$.

$$a_1+\dots+a_n = \underbrace{(a_1+\dots+a_N)}_{S}+(a_{N+1}+\dots+a_n) > S+(M+1)\cdot(n-N) \qquad \forall n>N$$

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n} > \frac{S}{n}+(M+1)\left(\frac{n-N}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} M+1$$

1...

... קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$,
$$\frac{S}{n} + (M+1)\left(\frac{n-N}{n}\right) > M$$

$$\forall n > \max(N_1, N_2) \,, \quad \frac{a_1+\dots+a_n}{n} > M$$

משפט Stolz: אם (a_n), (b_n) סדרות, כך ש- $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ו- $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$ אז $\frac{a_n}{b_n} \to L$.

מסקנה: אם $a_n \to L$ ו- $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים המקיימת $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אז
$$\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} \to L$$
"ממוצע משוקלל"

הוכחה: נגדיר, $c_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$

$$c_{n+1} - c_n = \alpha_{n+1} \cdot a_{n+1}$$

נגדיר, $b_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ $\qquad b_{n+1} - b_n = \alpha_{n+1}$

$$\frac{c_{n+1}-c_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\alpha_{n+1}\cdot a_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = a_{n+1} \longrightarrow L \underset{\text{Stolz}}{\Rightarrow} \frac{c_n}{b_n} \to L$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך ש- $n > N \Rightarrow L - \varepsilon/2 < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < L + \varepsilon/2$

נסמן $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n > 0$
$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\Delta b_n < \Delta a_n < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\Delta b_n \qquad (n > N)$$

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\Delta b_{N+1} + \dots + \Delta b_n) < \Delta a_{N+1} + \dots + \Delta a_n < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(\Delta b_{N+1} + \dots + \Delta b_n)$$

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_{N+1}) < a_{n+1} - a_{N+1} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_{N+1})$$

$$a_{N+1} + \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_{N+1}) < a_{n+1} < a_{N+1} + \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_{N+1})$$

$$\frac{a_{N+1}}{b_{n+1}} + \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{n+1} - b_{N+1}}{b_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < \frac{a_{N+1}}{b_{n+1}} + \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\frac{b_{n+1} - b_{N+1}}{b_{n+1}} \longrightarrow L + \frac{\varepsilon}{2}$$

25.8.10 חדו"א 1

עבור $x_1,\dots,x_n>0$, הממוצע ההרמוני של $x_1,\dots,x_n$ הוא:

$$\min\{x_i\} \le \frac{1}{\frac{1/x_1+1/x_2+\dots+1/x_n}{n}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \max\{x_i\}$$

א"ש הממוצעים: אם $x_1,\dots,x_n>0$ אז:

$$\frac{n}{1/x_1+\dots+1/x_n} \le \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \le \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$

הוכחה: נשתמש בא"ש הממוצעים לגבי $\frac{1}{x_1},\dots,\frac{1}{x_n}$.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\| $$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1+\dots+x_n}} \Rightarrow \frac{n}{1/x_1+\dots+1/x_n} \le \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$$

משפט: אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים ו- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

אז $\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \to L$ (ואם $x_n\to\infty$ אז $\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\to\infty$)

הוכחה: נניח ש- $L>0$. $\quad \frac{1}{x_n}\to\frac{1}{L} \quad x_n\to L$

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} \to \frac{1}{L}$$ עפ"י צ'זארו.

$$\frac{n}{1/x_1+\dots+1/x_n} \to L \quad , \quad \frac{x_1+\dots+x_n}{n}\to L$$

לכן, עפ"י א"ש הממוצעים ומשפט הסנדוויץ', $\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \to L$

במקרה $L=0$, $\frac{1}{x_n}\to\infty$,

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} \to \infty$$

$$\frac{n}{1/x_1+\dots+1/x_n} \to 0$$

ושוב סנדוויץ': $x_n\to\infty$ ... כנ"ל.

25.8.10 תרגול 1

דוגמאות:

(א) $x_n = n \to \infty$

$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$= \sqrt[n]{n!} \to \infty$

(ב) נחשב את הגבול, $\lim \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$. $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

נגדיר $x_n = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2(n-1)}{n-1}}$. כלומר, אם $y_n = \binom{2n}{n}$ $x_n = \frac{y_n}{y_{n-1}}$

$$y_n = \frac{\cancel{y_n}}{\cancel{y_{n-1}}} \cdot \frac{\cancel{y_{n-1}}}{y_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot y_1 = x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot y_1 .$$

אם $x_n \to L$ אז גם $\sqrt[n]{x_n \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot y_1} \to L$ ולכן $\sqrt[n]{y_n} \to L$.

$$x_n = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2(n-1)}{n-1}} = \frac{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}} = \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \cdot \frac{(n-1)!^2}{n!^2} = (2n-1)(2n) \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{(2n-1)\cdot 2n}{n^2} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot 2 \to 4$$

מסקנה: $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \to 4$