

הקשר בין $\lim$ ו- $\limsup$

יש קשר בין $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $\lim$ ו- $\limsup$

$$(a_n) \leq (c_n) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \quad (2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \leq c_n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \text{ ו- } (b_n) \text{ מתכנסת ל- } L$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \text{ מכאן: } L$$

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad n > N, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

$$, n > N_2 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon, \quad n > N, \quad \text{כאן } N = \max\{N_1, N_2\}$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$$

הוכחה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0, \quad \text{כאן: } (1)$$

$$\forall n, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{כאן: } (2)$$

$$a^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$, -1 < a < 1 \quad \text{כאן: } (2)$$

$$a = \frac{1}{1+b}, \quad b > 0, \quad \text{כאן: } a > 0, \quad \text{כאן: } -1 < a < 1$$

$$(1+b)^n > 1 + bn > bn$$

$$0 < \left(\frac{1}{1+b}\right)^n < \frac{1}{bn}$$

$$a^n = \left(\frac{1}{1+b}\right)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{כאן: } (2)$$

$$|a^n| = |a|^n \rightarrow 0$$

$$, -1 < a < 1 \quad \text{כאן: } (2)$$

$$-|a^n| \leq a^n \leq |a^n|$$

$$a^n \rightarrow 0, \quad \text{כאן: } (2)$$

$$a > 0 \quad \text{כל} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{! אפ"כ} \quad (3)$$

הוכחה: $a > 1$ - נקדם קודם

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{ונניח} \quad a_n = \sqrt[n]{a} - 1 \quad \text{! מניח}$$

$$\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$$

$$a = (1 + a_n)^n > 1 + n a_n > n a_n$$

$$0 < a_n < \frac{a}{n}$$

כל n - נקדם

$$\sqrt[n]{a} = 1 + a_n \rightarrow 1$$

כל $a_n \rightarrow 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ $\sqrt[n]{a} = 1$! אפ"כ

$$b > 1 \quad \text{נניח} \quad a = \frac{1}{b} \quad \text{כל} \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

! אפ"כ (4)

$n \geq 2$ כל $x > 0$ כל $x > 0$! אפ"כ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow (1+x)^n > \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + a_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \quad a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \quad \text{כל} \quad n \geq 2$$

$$a_n^2 < \frac{2}{n-1} \quad n \geq 2$$

$$0 < a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

כל $a_n \rightarrow 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ $\sqrt[n]{n} = 1$! אפ"כ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{כל} \quad a_n \quad \text{כל} \quad a_n \quad \text{כל} \quad a_n$$

ההיגיון, כל a_n $\text{כל} \quad a_n$ $\text{כל} \quad a_n$ $\text{כל} \quad a_n$

כל a_n $\text{כל} \quad a_n$ $\text{כל} \quad a_n$ $\text{כל} \quad a_n$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\vdots$$

כל a_n $\text{כל} \quad a_n$ $\text{כל} \quad a_n$ $\text{כל} \quad a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{כל} \quad a_n \quad \text{כל} \quad a_n$$

סדרה: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ כאשר $|q| < 1$.
 הוכחה: נחשב סכומים חלקיים.
 $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}$
 סדרה: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כאשר $a_n \rightarrow 0$ כ- $n \rightarrow \infty$.
 הוכחה: נקרא "האחרון".
 $a_n = S_n - S_{n-1}$

חומר
מחזורי

2

סדרה: נאמר שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L , ונניח $a_n \rightarrow L$.
 אם $M > 0$ קיים N כזה ש- $a_n > M$ לכל $n > N$.
 כלומר, $\forall M > 0 \exists N \forall n > N, a_n > M$.

נאמר ש- $a_n \rightarrow -\infty$ כ- $n \rightarrow \infty$.
 כלומר, $\forall M < 0 \exists N \forall n > N, a_n < M$.

סדרה: (a_n) סדרה $a_n = n$, כלומר $a_n \rightarrow \infty$ כ- $n \rightarrow \infty$.
 הוכחה: $M > 0$ קיים N כזה ש- $a_n > M$ לכל $n > N$.
 כלומר, $a_n = n > M$ לכל $n > M$.

סדרה: אם $a_n \rightarrow \infty$ אז $-a_n \rightarrow -\infty$.
 כלומר, $a_n \rightarrow -\infty$ אז $-a_n \rightarrow \infty$.

סדרה: (א) $a_n \rightarrow L$ אז $-a_n \rightarrow -L$.
 כלומר, $a_n > M$ אז $-a_n < -M$.
 כלומר, $a_n > M$ אז $-a_n < -M$.
 כלומר, $a_n > M$ אז $-a_n < -M$.

סעיף: אם $a_n \rightarrow \infty$ ו- $a_n \rightarrow -\infty$ אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה.

הוכחה: נניח שיש $a_n \rightarrow \infty$. נניח, בלי הגבלה, (a_n) היא סדרה.

אם קיים $M > 0$ כך ש- $|a_n| \leq M$ $\forall n$ ב- $\mathbb{R}$.

אם לא, אז $a_n \leq M$ $\forall n$ ב- $\mathbb{R}$, או $a_n > M$ $\forall n$ ב- $\mathbb{R}$.

סעיף: אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, $L \in \mathbb{R}$.

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת ו- $L \neq \infty$, אז $L \in \mathbb{R}$.

עזרה (למטרת הוכחה):

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $b_n \geq c$ לכל n , $c \in \mathbb{R}$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $b_n \geq c > 0$ לכל n .

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $b_n \geq c > 0$ לכל n .

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $b_n \geq c > 0$ לכל n .

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $b_n \geq c > 0$ לכל n .

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $b_n \geq c > 0$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.

הוכחה:

(1) $M > 0$ קיים N_1 כך ש- $a_n > M$ $\forall n > N_1$.

קיים N_2 כך ש- $b_n > 0$ $\forall n > N_2$.

אז $a_n + b_n > M + 0 = M$ $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$.

, $n > N_1$, כל $p > N_1$ ס"פ, $M > 0$ ו'. $a_n \rightarrow \infty$ (2)

$B-1 < b_n < B+1$, $n > N_2$ כל $p > N_2$ ס"פ, $b_n \rightarrow B$

$$a_n > M - (B-1)$$

$$\forall n > \max\{N_1, N_2\} \quad a_n + b_n > M - (B-1) + (B-1) = M$$

-ע $p > N_1$ ס"פ, $\epsilon = \frac{B}{2}$ נק' $M > 0$ ו'. (4)

$$n > N_1 \Rightarrow B - \frac{B}{2} < b_n < B + \frac{B}{2} \Rightarrow b_n > \frac{B}{2}$$

$$n > N_2 \Rightarrow a_n > \frac{M \cdot 2}{B}$$

-ע $p > N_2$ ס"פ

$$n > \max\{N_1, N_2\} \quad a_n b_n > M \cdot \frac{2}{B} \cdot \frac{B}{2} = M$$

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \quad \text{כל} \quad a_n \rightarrow \infty \quad (5)$$

פ"ס כל n -P $-\epsilon < \frac{1}{a_n} < \epsilon$ כל $\epsilon > 0$ כל

$$a_n > M$$

, n כל p ס"פ, $M = \frac{1}{\epsilon}$ נק'.

$$a_n > \frac{1}{\epsilon} \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} - 1} \quad \text{כל} \rightarrow \infty \quad \text{ל"ק}$$

, $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$ ס"פ, n כל p $\sqrt[n]{n} - 1 > 0$ -ע נק'.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} - 1} = \infty$$

, $b_n \rightarrow \infty$ ס"פ כל $a_n \rightarrow \infty$ -1 n כל p $a_n \leq b_n$ ס"פ: כל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n - (-1)^n = \infty$$

:ל"ק

$$(-1)^n \leq 1$$

$$n - (-1)^n \geq n - 1 = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$\lim a_n \leq \lim b_n$, נוסח (b_n), (a_n) אם:

$a_n < b_n$, n GP כל ש

$A < B$ $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ נוסח: נ

$$B - \varepsilon = A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} \quad \varepsilon = \frac{|A-B|}{2} > 0 \quad \text{נ.י.}$$

$$\forall n > N_1 \quad a_n < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2} \quad \text{ע.ק. נ.י.}$$

$$\forall n > N_2 \quad b_n > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2} \quad \text{ע.ק. נ.י.}$$

$$a_n < \frac{A+B}{2} < b_n \quad N = \max\{N_1, N_2\} \quad \text{GP}$$

n GP $a_n \leq b_n - 1$ נוסח (b_n) - 1 (a_n) אם: נוסח

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{כל ש}$$

נוסח: נוסח $\lim a_n > \lim b_n$ אם: נוסח

$\downarrow$ $a_n > b_n$ n GP

נוסח

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - n}{2n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} + \frac{2}{n^3}}$$

$$\text{נוסח: נוסח} \quad \frac{2}{n} + \frac{2}{n^3} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{\frac{2}{n} + \frac{2}{n^3}} \rightarrow \infty \quad \text{כל ש} \quad \frac{2}{n} + \frac{2}{n^3} > 0$$

$$\frac{3n^3 - n}{2n^2 + 2} = \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{1}{\frac{2}{n} + \frac{2}{n^3}}\right) \rightarrow \infty \quad \text{כל ש}$$

הגדרה: חזון $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות $\in \mathbb{R}$ חזרים

$$(1) \text{ } a_n = o(b_n) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ כל } b_n \neq 0 \text{ } \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$$

(2) $a_n = O(b_n)$ אם קיים $c > 0$ חזרי $a_n \leq c \cdot b_n$

$$BP \text{ } \frac{a_n}{b_n} \leq c \text{ } \Leftrightarrow \text{ } a_n = O(b_n) \text{ } (c \text{ חזרי})$$

$$(a_n = O(1) \Leftrightarrow a_n \text{ חזרי})$$

אם $a_n \geq c \cdot b_n$, $b_n = O(a_n)$ כל $a_n = \Omega(b_n)$ אם $c > 0$

$$b_n = O(a_n) \text{ אם } a_n = O(b_n) \text{ כל } a_n = \Theta(b_n)$$

למה: חזרי (a_n) סדרה $0 < r < 1$

$$a_n \rightarrow 0 \text{ כל } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r, n \text{ } BP \text{ } a_n \text{ חזרי}$$

פונקציה: $|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot r$ BP חזרי a_n

$$|a_2| \leq |a_1| \cdot r$$

$$|a_3| \leq |a_2| \cdot r \leq |a_1| \cdot r^2$$

$$|a_n| \leq |a_3| \cdot r \leq |a_1| \cdot r^{n-1}$$

$$|a_n| \leq |a_1| \cdot r^{n-1}, \text{ כל } n \text{ } (a_n \text{ חזרי})$$

$$-|a_1| \cdot r^{n-1} \leq a_n \leq |a_1| \cdot r^{n-1}$$

$$a_n \rightarrow 0 \text{ כל } n \text{ } , \text{ } a_n \text{ חזרי}$$

הגדרה: חזרי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ כל } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \text{ } s < 1$$

$$(r = \frac{1+s}{2} : BP) \text{ } s < r < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = s < r = \lim_{n \rightarrow \infty} r$$

$$a_n \rightarrow 0 \text{ כל } n \text{ } \Leftrightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r, \text{ } BP \text{ } a_n \text{ חזרי}$$

BP: $a_n = 0$ für $a > 1$ BP: $a_n = 0$ für $a < 1$ BP: $a_n = 0$ für $a = 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow 0$$

BP: $a_n = 0$ für $a > 1$ BP: $a_n = 0$ für $a < 1$ BP: $a_n = 0$ für $a = 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{a}$$

BP: $a_n = 0$ für $a > 1$ BP: $a_n = 0$ für $a < 1$ BP: $a_n = 0$ für $a = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = \infty$$

BP: $a_n = 0$ für $a > 1$ BP: $a_n = 0$ für $a < 1$ BP: $a_n = 0$ für $a = 1$