

$a_n \in \mathbb{R}$ וזו n בל: סדרה אינסופית $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

$a_1, a_2, a_3, \dots$

"... $n > N$ בל ב N ק"מ"

אם: n בל $a_n > 0$ וזו n בל $b_n > 0$

זו n בל $a_n + b_n > 0$ וזו

כינסו: ק"מ $n > N_1$ בל $a_n > 0$

ק"מ $n > N_2$ בל $b_n > 0$

נספיק $N = \max(N_1, N_2)$

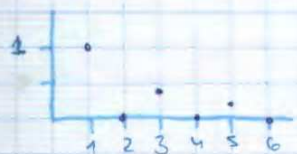
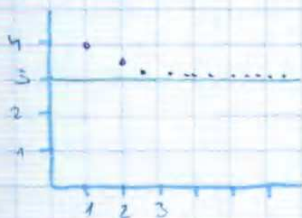
בל $n > N$ מקיים, וזו $n > N_1$ וזו $n > N_2$

כן $a_n > 0$ וכן $b_n > 0$ וכן $a_n + b_n > 0$

סדרה בל

ק"מ $n \rightarrow \infty$

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad (1)$$



$$a_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ 0 & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

$$a_n \rightarrow 1 \quad n \rightarrow \infty$$

$$n \text{ בל } a_n = 1 \quad (2)$$

אם $a_n = 4$ וזו $n \rightarrow \infty$

אם $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ וזו $n \rightarrow \infty$

$$d(a, b) = |a - b|$$

$$d(a_1, 3) = |4 - 3| = 1$$

$$d(a_{10}, 3) = |3.1 - 3| = \frac{1}{10}$$

$$\dots |a_n - 3| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10}, \text{ אם } n > 10 \text{ בל}$$

הסדרה: נאמר שסדרה x קרובה ל L אם כדי $0 < \varepsilon$
 אז $|x - L| < \varepsilon$.

... GP $n > 10$, $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ קרובה ל-3 אם כדי $\frac{1}{10}$.

← כעת ב' אנו הסדרה a_n קרובה ל-3 אם כדי $\frac{1}{10}$.

נניח שאנו בוודאי קרובה ל' שעתה ב' אנו הסדרה קרובה ל-3.

אם כדי $\frac{1}{100}$ GP $n > 100$ מקיים $|a_n - 3| = |3 + \frac{1}{n} - 3| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$.

הסדרה: נאמר שסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל L אם GP L ,

ונסמן $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$. אז GP $\varepsilon > 0$, כעת ב' אנו הסדרה

קרובה ל- L אם כדי ε .

הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל L אם GP $\varepsilon > 0$,

קיים N כזה, כך GP $n > N$ מקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

דוגמאות:

(א) נוכיח ש- $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

י. $\varepsilon > 0$. עלינו למצוא N כזה, כך GP $n > N$ מקיים

$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. כלומר, ש- $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

ע"י חזון ארכימדס, קיים N כזה, ש- $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

GP $n > N$ אכן מקיים $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

כן, GP $n > N$ $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(ב) GP $c \in \mathbb{R}$, אז $a_n = c$ GP n , אז $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$.

הוכחה: GP $\varepsilon > 0$, נבחר $N = 1$. GP $n > N$ מקיים

$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ - e נכוח. } a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

בוכנסו BP $\varepsilon > 0$, $n > N$ כל n כן N וכל n כן N

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ כל } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1 \text{ נקח}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

BP $n > N$ נקבע:

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ - e נכוח. } a_n = \frac{n}{n+1} \quad (7)$$

$$a_n - 1 = \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{-1}{n+1}$$

הוכנסו:

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1}$$

$$n > N > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \text{ נקח, } \varepsilon > 0 \text{ BP}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$$

"BP", "ק"ם = נכוח

$$(x^2 \geq 0, x \in \mathbb{R} \text{ BP}) \quad \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$\forall$ BP

$$(x \geq 0 \text{ - e כל } x \in \mathbb{R} \text{ ק"ם}) \quad \exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

$\exists$ ק"ם

$$(y^2 = x \text{ - e כל } x \geq 0 \text{ ק"ם } y) \quad \forall x \geq 0 \exists y: y^2 = x$$

הוכחה: $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0, \forall n > N, |a_n - 1| < \varepsilon$

$$\neg (\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$$

כל x לא P - ק"ם

$$\neg (\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$$

$$\forall a \in A, f(a) \in B$$

$$f: A \rightarrow B \text{ - ק"ם}$$

הפונקציה f מונקציה

$$f(a) = b \text{ - e כל } a \in A \text{ ק"ם } b \in B \text{ BP}$$

הפונקציה f נכונה - מונקציה

$$\Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A, f(a) = b$$

$\forall a \in A, f(a) \in B$ מן $f: A \rightarrow B$ תוצאות.
 $a \in A$ ו $b \in B$ כל f או f תוצאות.
 $\exists a \in A, f(a) = b$ - ע.פ.

לדוגמה (1): $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ תוצאות $f(x) = x + 1$
 (2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ תוצאות $f(x) = x^2$
 $f(a) = b$ - ע.פ. $a \in A$ כל f או f תוצאות.

$a = b - 1$ נניח.
 $a^2 = b$ - ע.פ. a ו $b = -1$ נניח (2)
 $a^2 \geq 0 > b$ - ע.פ. a כל f או f תוצאות.

$\neg (\forall b \in B \exists a \in A, f(a) = b)$: כל $f: A \rightarrow B$ "תוצאות"
 $\Rightarrow \exists b \in B \neg (\exists a \in A, f(a) = b)$
 $\Rightarrow \exists b \in B \forall a \in A, f(a) \neq b$

$a \neq b$ - ע.פ. $a, b \in A$ כל f או f תוצאות.
 $\forall a \in A, \forall b \in A, b \neq a, f(a) \neq f(b)$ - ע.פ. a ו b תוצאות.
 $\exists a \in A, \exists b \in A, b \neq a, f(a) = f(b)$: כל f או f תוצאות.

$\exists a > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |a_n - L| < \epsilon$ - ע.פ. a ו N תוצאות.
 $\exists \epsilon > 0, \forall N > 0, \exists n > N, |a_n - L| \geq \epsilon$ - ע.פ. a ו N תוצאות.

1-1. f או f תוצאות $a_n = \frac{1}{n}$ - ע.פ. a ו N תוצאות.
 $\epsilon = \frac{1}{2}$ נניח.
 $|a_n - L| \geq \epsilon$ - ע.פ. a ו N תוצאות.

$\Rightarrow |1 - a_n| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - a_n| \geq \frac{1}{2}$ - ע.פ. a ו N תוצאות.
 $a_n \leq \frac{1}{2}$ - ע.פ. a ו N תוצאות.

משפט: (יחידות הסב) (uniqueness of limit)

אם P סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש לה, אז בולט יחיד.כלומר, אם $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_1$ וכן $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_2$ אז $L_1 = L_2$.פונקציה: נניח שלכל $L_1 \neq L_2$, $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$.

$$\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$$

לפי הסדרה הסב, קיים $N_1 > 0$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים: $|a_n - L_1| < \varepsilon$.קיים $N_2 > 0$ כך שלכל $n > N_2$ מתקיים: $|a_n - L_2| < \varepsilon$.נבחר $N = \max(N_1, N_2)$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $n > N_1$ וכן $n > N_2$, ולכן

$$|a_n - L_1| < \varepsilon, \quad |a_n - L_2| < \varepsilon$$

ע"י משוואה משולשת,

$$|L_1 - L_2| = d(L_1, L_2) \leq d(L_1, a_n) + d(a_n, L_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L_1 - L_2| \quad \downarrow$$

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| \dots \downarrow$$

סדרה: אם קיים מספר $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$, אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה קוסיטור.מכאן: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ונסמן:פונקציה: סדרה של מספרים $a_n = (-1)^n$.אנחנו רואים קיים L כך ש- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.פונקציה: נניח שלכל $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.נבחר $\varepsilon = 1$. קיים N כך שלכל $n > N$, $|a_n - L| < 1$.קיים $n_1 = 2N$ (כך $n_1 > N$).קיים $n_2 = 2N + 1$ (כך $n_2 > N$).

$$|a_{n_1} - L| < 1 \quad |a_{n_2} - L| < 1$$

$$|1 - L| < 1 \quad |(-1) - L| < 1$$

$$2 = |1 - (-1)| = |(1 - L) + (L - (-1))| \leq |1 - L| + |L - (-1)| < 1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 < 2 \quad \downarrow$$

מה זה open interval

הוכחה $(a_n \cdot c)_{n=1}^{\infty}$ של $c \in \mathbb{R}$ - הוכחה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{אם } c \neq 0$$

$$a_n \rightarrow L \quad \text{על פניו: הוכחה}$$

אם $n > N$ כל $\epsilon > 0$ נבחר N כך ש-

$$|c \cdot a_n - c \cdot L| < \epsilon$$

$$|c \cdot a_n - c \cdot L| = |c \cdot (a_n - L)| = |c| \cdot |a_n - L|$$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = 0$ נבחר n כל $c a_n = 0$, $c = 0$ או

$$|a_n - L| < \frac{\epsilon}{|c|}, \quad n > N \quad \text{כל } N \text{ מספיק, } c \neq 0 \text{ או}$$

$$|c a_n - c L| = |c| \cdot |a_n - L| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon \quad \text{אם } n > N \text{ כל, כל}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c L = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{כל } c a_n \rightarrow c L$$

הוכחה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ - הוכחה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{אם } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ו- } (b_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{הוכחה: נבחר}$$

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}, \quad n > N_1 \quad \text{כל } N_1$$

$$|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}, \quad n > N_2 \quad \text{" " " "}$$

$$n > N_2, \quad n > N_1 \quad \text{כל } n > N \quad \text{כל } N = \max\{N_1, N_2\}$$

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$a_n + b_n \rightarrow A + B \quad \text{כל } n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + (-\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{2}}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{\sqrt{2}}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + (-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n}) = 0 + (-0) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = 0$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = 0$$

$$|a_n| \leq c$$

$$|a_n| = n < c \text{ for } n \geq n_0, \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = n$$

$$|a_n| = 1 \leq 1 \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (-1)^n$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$n < N \text{ for } n \geq n_0, \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$|a_n - L| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |a_n| = |(a_n - L) + L| \leq |a_n - L| + |L| < \epsilon + |L|$$

$$n = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, |L| + \epsilon\}$$

$$|a_n| \leq n \text{ for } n \geq n_0$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

$$n \text{ for } |a_n| \leq M \text{ for } n \geq n_0$$

$$a_n \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$|a_n b_n| < \frac{\epsilon}{2}, n > N, \text{ für } \epsilon > 0, \text{ für } n > N \text{ gilt}$$

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

$$a_n b_n \rightarrow AB, \text{ für } n \rightarrow \infty, A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$a_n b_n = a_n (b_n - B + B) = a_n (b_n - B) + a_n B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n - B = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n (b_n - B) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n B = 0 + B = B$$

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

$$a_n (b_n - B) \rightarrow 0, a_n B \rightarrow AB$$

$$\Rightarrow a_n b_n = a_n (b_n - B) + a_n B \rightarrow AB$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt $a_n b_n \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$.

סכמתו נסמן $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ נכים - $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n \cdot B|}$$

נכיון - $b_n \rightarrow B$ קיים N_1 כך של $n > N_1$ $|b_n - B| < \frac{|B|}{2}$

$$|B| = |(B + b_n) - b_n| \leq |B - b_n| + |b_n| \leq \frac{|B|}{2} + |b_n|$$

$$|b_n| \geq \frac{|B|}{2}$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|b_n| \cdot |B|} \leq \frac{|B - b_n|}{\frac{1}{2}|B|^2} \quad \forall n > N_1$$

עם, נכיון - $b_n \rightarrow B$ קיים N_2 כך של $n > N_2$ $|B - b_n| < \frac{1}{2}|B|^2 \cdot \varepsilon$

$$|B - b_n| = |b_n - B| < \frac{1}{2}|B|^2 \cdot \varepsilon$$

בסוף $N = \max\{N_1, N_2\}$ אם $n > N$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| \leq \frac{|B - b_n|}{\frac{1}{2}|B|^2} < \frac{\frac{1}{2}|B|^2 \varepsilon}{\frac{1}{2}|B|^2} = \varepsilon$$

משפט השנייה של אפלטון:

אם $(a_n), (b_n)$ סדרות מתכנסות,

אם סכום/הפרש/מכפלה הסדרות מתכנסים לסכום/הפרש/מכפלה

אם $b_n \neq 0$ לכל n , $\lim b_n \neq 0$, אז אם a_n מתכנס, אז $\frac{a_n}{b_n}$ מתכנס.

דוגמה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 5}{7n^2 - 15n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{7 - \frac{15}{n}} = \quad (1)$$

$$= \frac{\lim 3 + (-2) \lim \frac{1}{n} + 5 \left(\lim \frac{1}{n} \right)^2}{\lim 7 + (-15) \lim \frac{1}{n}} = \frac{3 + (-2) \cdot 0 + 5 \cdot 0^2}{7 + (-15) \cdot 0} = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2 + (-1)^n \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{2 + \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{0+0}{2+0} = 0 \quad (2)$$

ע' ע'נ' מ' סופ' ל' אברים, מ' ע' מחיב' מ' סופ' ל'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{if and only if} \quad (b_n) \text{ is bounded}$$

$n > k$ BP $b_n = a_{n-k}$ של, מניח k ימים' ר' אחר b_n של

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-8} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{n-8} \quad : 4 \leq n \leq 10$$