

אם $(a_n)_n$ סדרה של מספרים חיוביים, $a_n \rightarrow a > 0$, $r \in \mathbb{R}$

ש $a_n^r \rightarrow a^r$ (כלומר, הפונקציה $f(x) = x^r$ רציפה ב- $(0, \infty)$)

הוכחה: (1) אם $a_n \rightarrow a$ ו- k מספר של $a_n^k \rightarrow a^k$ ואם $a_n^{1/k} \rightarrow a^{1/k}$

מכאן: $a_n^k \rightarrow a^k$ מניבים $a_n^{1/k} \rightarrow a^{1/k}$

הפונקציה $f(x) = x^{1/k}$ היא מתאמת, הפונקציה $f(x) = x^k$ היא רציפה,

ובמיוחד בקטע $[0, \infty)$ היא $[0, \infty)$ רציפה, כלומר

הפונקציה הפשוטה, הפונקציה $g(x) = x^{1/k}$ היא רציפה.

כלומר, $a_n^{1/k} \rightarrow a^{1/k}$

(2) אם $a_n \geq 1$ ו- $a_n \rightarrow 1$, אז $a_n^r \rightarrow 1$

אם $a_n \leq 1$ ו- $a_n \rightarrow 1$, אז $a_n^r \rightarrow 1$

הוכחה: אם $a_n \geq 1$ ו- $\frac{1}{k} \leq r \leq k$, אז $a_n^{1/k} \leq a_n^r \leq a_n^k$

כלומר, $a_n^r \rightarrow 1$ ו- $a_n^{1/k} \rightarrow 1$

אם $a_n \leq 1$ ו- $\frac{1}{k} \leq r \leq k$, אז $a_n^k \leq a_n^r \leq a_n^{1/k}$ ויש סגור

(אם $r = \frac{1}{a_n - r}$ נגזר, אז $a_n^r = \frac{1}{a_n^{-r}}$)

(3) אם $a_n \rightarrow 1$ אז $a_n^r \rightarrow 1$

הוכחה: נבדוק ראשית את המקרה $a_n \geq 1$ ו- $a_n \rightarrow 1$ ונראה

אם $a_n \leq 1$

(4) אם $a_n \rightarrow a$ אז $a_n^r \rightarrow a^r$

הוכחה: אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\frac{a_n}{a} \rightarrow 1$, אז $\frac{a_n^r}{a^r} = \left(\frac{a_n}{a}\right)^r \rightarrow 1$, כלומר $\frac{a_n^r}{a^r} \rightarrow 1$

כלומר, $a_n^r \rightarrow a^r$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$f(x) = e^x$ פונקציה רציפה, לפי המשפט של ל' היא $(0, \infty)$

$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

הפונקציה הפשוטה היא הפונקציה $\ln$

$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$

$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{\frac{3n}{2}} \right]^{\frac{(4n+1)2}{3n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(4n+1)2}{3n}} \cdot \ln \left[\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{\frac{3n}{2}} \right]$$

$$\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{\frac{3n}{2}} \rightarrow e \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{\frac{3n}{2}} \rightarrow 1 \quad \frac{(4n+1)2}{3n} \rightarrow \frac{8}{3}$$

$$\frac{(4n+1)2}{3n} \cdot \ln \left(\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{\frac{3n}{2}} \right) \rightarrow \frac{8}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n+1} = e^{\frac{8}{3}}$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} - y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow d} \frac{\sin(x-d)}{x^2 - d^2} = \lim_{x \rightarrow d} \frac{\sin(x-d)}{(x-d)(x+d)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow d} \frac{\sin(x-d)}{x-d} \cdot \lim_{x \rightarrow d} \frac{1}{x+d} = 1 \cdot \frac{1}{2d} = \frac{1}{2d}$$

רציפות בהיפוך שווה

פרקציה f המשפחה בקצו I נקראת רציפה בהיפוך שווה אם-

אם $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך $\forall x, y \in I$ המקיימים $|x-y| < \delta$ מקיים $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

במובן זה, אם f רציפה בנקודה $a \in I$ אז f רציפה בהיפוך שווה בנקודה a של I , כלומר, f רציפה ב- I .

דוגמה: $f(x) = 5x$, f רציפה בהיפוך שווה ב- $\mathbb{R}$.

הוכחה: $\forall \epsilon > 0$ נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{5}$. אז $|x-y| < \delta \Rightarrow |5x - 5y| < 5\delta = \epsilon$.

באופן דומה, אם קיים קבוע $c > 0$ כך $\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$$

אז f רציפה בהיפוך שווה ב- I .

כל $\forall \epsilon > 0$, נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ ואז

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c|x-y| < c\delta = \epsilon$$

המשפט נקרא "משפט ליפשיץ".

f מקיימת משפט ליפשיץ ב- I אם קיים $c > 0$ כך ש-

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$$

משפט קניאור: פרקציה רציפה בקצו סגור רציפה בו בהיפוך שווה.

הוכחה: בדרך כלל, נניח שקיים $\epsilon > 0$ כך $\forall x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \geq \epsilon \quad \text{אם} \quad |x-y| < \delta$$

כל n אדם, ניקח $\delta = \frac{1}{n}$, קיימים $x_n, y_n \in I$ כך ש-

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

מכיוון שהסדרה (x_n) נמצאת בקצו סגור, יש לה גבול - סדרה

המכנס $x_n \rightarrow x$, נקודה בקצו, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}$$

3

לכן, (y_n) סדרה, $y_n \rightarrow x$.

$\lim f(x_{n_k}) = f(x)$... היות f - e נצפה,

$\lim f(y_{n_k}) = f(y)$

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) = 0$

$\hookrightarrow$. אם $\epsilon \in \mathbb{R}$ $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$, $\forall k$

דוגמה: $f(x) = \sqrt{x}$ נצפה ב- $[0, 1]$.

הערה: $f(x) = \sqrt{x}$ נצפה ב- $[1, \infty)$ גם.

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| \leq \frac{|x-y|}{2}$

לכן, ב- $[1, \infty)$ מקיים ϵ - δ קריטריון.

דוגמה: $f(x) = x^2$ ב- $[0, \infty)$ אינה נצפה.

כ- ρ של עמוד $\epsilon = 1$, δ קיים $\delta > 0$ כדלה:

אם היה $\delta > 0$ כך $\forall x, y \in [0, \infty)$ מקיים $|x-y| < \delta$

מקיים $|x^2 - y^2| < 1$ אם $x \geq 0$ ב- ρ קריטריון

$\hookrightarrow x\delta + \delta^2/4 < 1 \Leftrightarrow |(x + \delta/2)^2 - x^2| < 1$

דוגמה: $f(x) = \frac{1}{x}$ ב- $(0, 1)$ אינה נצפה.

כי פונקציה נצפה ב- ϵ בקצה הימני חייב להיות חסומה.

נקח $\epsilon = 1$. קיים $\delta > 0$ כך $\forall x, y$ $|f(x) - f(y)| < 1$, $|x - y| < \delta$

נקח $x = \frac{1}{n}$ מקיים $\delta < \frac{1}{n}$.

במק ρ קצה, $(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n})$, $...$, $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$, $...$, $(0, \frac{1}{n}]$

הפונקציה חסומה. ρ של, בקצה השמאלי, $\forall x \leq \frac{1}{n}$

$|f(x) - f(\frac{1}{n})| \leq 1$, בקצה שמאלי, $|f(x) - f(\frac{1}{n})| \leq 1$...

משפט: פונקציה $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ נצפה ב- (a, b) אם ורק אם

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ קיימים והם שווים.

(כלומר, f נצפה ב- (a, b) אם f נמשך)
לכרחיים פונקציה נצפה ב- $[a, b]$

($\Rightarrow$) נוכח: קיים סדרה x_n בסדרה a כזו ש- $x_n \rightarrow a$, $x_n > a$,
 ונניח: $f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$, $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

בזירה a נחלק את הסדרה x_n לסדרה f בסדרה $[a, b]$ כזו שבה
 פונקציה רציפה. לפי משפט בינור, f רציפה ב- a - $[a, b]$

$\Leftarrow$ f רציפה ב- a - (a, b) .

($\Leftarrow$) אם f רציפה ב- a - (a, b) ואם בנורמל f רציפה ב- a - (a, b) .

נניח שקיים סדרה x_n בסדרה a כזו ש- $x_n \rightarrow a$, $x_n > a$.

קטע: הסדרה $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ קיים אם סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כזו ש-

$x_n > a$ ו- $x_n \rightarrow a$, הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ מתכנסת.

נוכח: אם $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ קיים ואם סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כזו ש-

בכיוון הפוך, נבחר סדרה x_n כזו ש- $x_n > a$, $x_n \rightarrow a$.

ע"י ברנמן, הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ מתכנסת. נניח, $L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כזו ש- $x_n > a$, $x_n \rightarrow a$, נבחר, הסדרה

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$ סדרה x_n כזו ש- $x_n \rightarrow a$.

לכן, $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots$ מתכנסת.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = L$ כזו ש- $y_n \rightarrow a$, לכן הסדרה מתכנסת.

לכן $L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

ע"י ברנמן, סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כזו ש- $x_n > a$, $x_n \rightarrow a$.

נניח סדרה $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ מתכנסת.

סדרה $\varepsilon > 0$, סדרה $\delta > 0$ קיים כזו ש- $|x - y| < \delta$, $x, y \in (a, b)$.

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ אם $x, y \in (a, b)$. סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ כזו ש-

לכן קיים N כזו ש- $|x_m - x_n| < \delta$ אם $m, n > N$.

לכן $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ אם $m, n > N$.

גזירה

סעיף: גזירי פונקציה במרחב $\mathbb{R}^n$ בקודם x .

אם קיים המסלול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ אזי אומרים f -ע x היא

גזירה בקודם x ומסמכים $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $f \in C^1$ x בק' x .

אם קיים המסלול $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ אומרים f -ע x היא

גזירה ימנית ב- x ומסמכים $f'_+(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

ובאופן דומה, $f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(f גזירה ב- x אם ואם בלבד שגזירה ימנית ושמאלית שוות.)
 $f'_+(x) = f'_-(x)$.

f גזירה בקטע I אם f גזירה בכל קודם $x \in I$.

(אם x נקודה קצה נדרוש גזירה ימנית או שמאלית בהתאם למקרה)

$$f(x) = a \cdot x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a \quad (\text{קבוע})$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

$$f(x) = x^n \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + n h x^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 x^{n-2} + \dots) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (n x^{n-1} + \binom{n}{2} h x^{n-2} + h(\dots)) = n x^{n-1}$$

דוגמה: $f(x) = |x|$, אולי גזירה ב-0.

$$f'_-(0) = (-x)' = -1, \quad f'_+(0) = (x)' = 1 \quad \text{כי}$$

אנחנו: B פונקציה שרשרת, x - נקודה, x - נקודה

פונקציה: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ נקודה

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$, כל f פונקציה

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\frac{h}{2}) \sin(\frac{h}{2})}{h/2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x \end{aligned}$$

פונקציה: B

אם f, g שרשרת x - נקודה $c \cdot f, f \cdot g, f+g$ (קבוע c)

$$(1) (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(2) (cf)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$(3) (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

פונקציה: $1, 2$ - נקודה

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)(f(x+h) - f(x))}{h} = \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \end{aligned}$$

פונקציה: B $z = f(y)$, x - נקודה, $y = g(x)$ שרשרת

נקודה $z = f(g(x))$ שרשרת, $y_0 = g(x_0)$, x_0 - נקודה

$$z' = (f \circ g)'(x) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$$\sin(x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

פונקציה: B

$$7 \quad ((\sin x)^2)' = 2 \sin x \cos x$$

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

: סכום

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (t = g(x+h) - g(x))$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+t) - f(g(x))}{t} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad \left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{1/x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \frac{1}{1/e} = e \end{array} \right)$$

$$x = e^t - 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (e^t)^{\frac{1}{e^t - 1}} = e \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{t}{e^t - 1}} = e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = \ln e = 1 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$$(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) = x^x (1 + \ln x)$$

$$(x^r)' = (e^{r \cdot \ln x})' = e^{r \cdot \ln x} \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = r \cdot x^{r-1}$$