

$\{f(a) : a \in A\}$ תחום הערכים של f נקרא $\text{Im } f$, $f: A \rightarrow B$ כל

$$\text{Im } f = \{x : x \geq 0\} \quad f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{לדוגמה}$$

עבור $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ כל פונקציה רציפה על קטע סגור.

תוצאה: f מקבלת ערכים מינימליים ו-maximalיים על $[a, b]$.

$$m = f(\alpha) = \min \{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{על } [a, b]$$

$$M = f(\beta) = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$y \in [m, M] \quad \forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$$

כל $y \in [m, M]$ מתקבלת על ידי f על $[a, b]$.

$$\Rightarrow \text{Im } f = f([a, b]) = [m, M]$$

עבור $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ כל פונקציה רציפה על קטע סגור, I קטע סגור, f רציפה על I .

$$M = \sup_{x \in I} f(x) \quad m = \inf_{x \in I} f(x) \quad \text{על } I$$

$$[m, M] \subseteq \text{Im } f \quad \text{על } I$$

$$\begin{aligned} & \text{אם } m < y < M \quad \text{אז קיים } x_1 \text{ כזה ש-} f(x_1) > \frac{m+y}{2} \\ & \text{וקיים } x_2 \text{ כזה ש-} f(x_2) < \frac{m+y}{2} \end{aligned}$$

כל $y \in [m, M]$ מתקבלת על ידי f על I .

$$\text{Im } f \subseteq [m, M] \quad \text{כל } y \in [m, M]$$

אם f רציפה על I ו- I קטע סגור, אז $\text{Im } f$ קטע סגור.

$$f(x_1) > y \quad \text{על } x_1 \text{ כזה ש-} y > m \quad \text{כל } y \in [m, M]$$

$$f(x_2) < \frac{m+y}{2} \quad \text{על } x_2 \text{ כזה ש-} \frac{m+y}{2} < y$$

כל $y \in [m, M]$ מתקבלת על ידי f על I .

$$f(x_0) = y \quad \text{על } x_0 \text{ כזה ש-} y \in [m, M]$$

$$\text{Im } f \subseteq [m, M] \quad \text{כל } y \in [m, M]$$

אם f רציפה על I ו- I קטע סגור, אז $\text{Im } f$ קטע סגור.

פונקציות מונטוניות

הגדרה: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת פונקציה שלם אם $\forall x, y \in I$ כך ש- $x < y$ מתקיים $f(x) < f(y)$.

פונקציה יורדת אם $\forall x, y \in I$ כך ש- $x < y$ מתקיים $f(x) > f(y)$.
 f נקראת מונטון בקצו אם היא שלם בו או יורדת.

למשל: פונקציה מונטון היא חת"ס.

משפט: אם $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ מונטון שלם אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ קיים.
 " " $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ " " $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ קיים.

$$f(a+0)$$

$$f(b-0)$$

הוכחה: נניח $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ מונטון שלם, נרצה להוכיח.

$\forall x \in [a, b)$ $f(a) \geq f(x)$ לפי הקבוצה $f([a, b))$

אז $L = \sup \{f(x) : x \in [a, b)\}$ קיים.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

הוכחה: $\forall \epsilon > 0$ $\exists x_0 \in (a, b)$ כך ש- $f(x_0) > L - \epsilon$.

$\forall x \in [a, b)$ $L \geq f(x) > f(x_0) > L - \epsilon$ מתקיים.

$|f(x) - L| < \epsilon$ $\forall x \in [a, b)$ $\delta = x_0 - a$ אז, נבחר δ כך ש-

הוכחה: $f(a) \geq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ נרצה להוכיח.

הוכחה: נקודת האמצע של פונקציה מונטון היא $f(a)$ או $f(b)$.
 שוויון ראשון (קבוצה).

משפט: אם $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (קצו) מונטון.

אם f רציפה ואם f היא קצו.

הוכחה: אם f רציפה, אז $f(I)$ קצו. הוכחה.

נניח ש- $f(I)$ קצו ונניח ש- f רציפה ב- a .

נניח a נקודה פנימית של קצו. נניח ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

נניח P של f פונקציה יורדת.

$$f(a) > f(a) - \varepsilon > f(a + \delta_0) \quad , \quad 0 < \varepsilon < f(a) - f(a + \delta_0) \quad \text{BP}$$
$$f(a) > f(x) > f(a) - \varepsilon \quad \text{при} \quad a < x < a + \delta = x_0 \quad \text{БП. } \delta = x_0 - a \quad \text{н.п.}$$

... $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, $|x - a| < \delta$

סוגי מרחב f רציף $R_{\text{מרחב}}$, f רציף $D - a$.

עפ"י הפונקציה הדסוכה:

5. $f^{-1}: J \rightarrow I$ מובנת, מונוטונית ורציפה ב- J .

$\left(\begin{array}{l} f^{-1}: B \rightarrow A \text{ נקראת הפיכה של } f, \text{ ו} \\ f^{-1}(f(x)) = x \\ f(f^{-1}(y)) = y \end{array} \right. \quad \forall x \in A \quad y \in B \quad f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x \quad \text{ע"פ} \quad \left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \text{ היא הפונקציה} \\ \text{אם } \end{array} \right)$

$J = \text{Im } f$ היא תמונה של f , כלומר

לפי י. הונקציה הופכה $f^{-1}: J \rightarrow I$

معك : f^{-1} سيراكازيم.

הוכחה: נניח f לבד f^{-1} , ונראה ש f^{-1} חלש.

- $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ - e n. d. u. $y_1 < y_2$ - $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ n. d. u.

• $x_1 \geq x_2$ - e, אבל כן נניח $x_2 = f^{-1}(y_2)$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, וכן

4. $y_1 \geq y_2$ pl $f(x_1) \geq f(x_2)$ sk!

• 3.3. f^{-1} , ρ . $\text{Im } f^{-1} = I$

הפונקציה $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ היא הפונקציה ההפוכה של $\sin$ על התחום $[-1, 1]$.

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

~ סקני, BP מ צד, בפונקציה $f(x) = \sqrt[m]{x}$ צדד וסניא.

הוכחה: f היא המונעצ'ה ההפוכה למונעצ'ה $g(x) = x^m$ ב- $[0, \infty)$.

חוקי חזקה (חזרה)

 $a > 0$ מ מספר שלם, המעריך a^m .

$(ab)^m = a^m b^m$	$a > 1, m > n \Rightarrow a^m > a^n$	חוקי חזקה:
$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$	$a < 1, m > n \Rightarrow a^m < a^n$	
$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}, \quad q = \frac{m}{n}, \quad a > 0$$

נוכחים שהמעצרים אינם תלויים בהצגה. המספר $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ אם $n' \sqrt[n']{a^{m'}} = n \sqrt[n]{a^m}$

$$\Leftrightarrow (n' \sqrt[n']{a^{m'}})^{nn'} = (n \sqrt[n]{a^m})^{nn'} \Leftrightarrow a^{m'n} = a^{mn'} \quad (m'n = mn')$$

ב חוקי החזקה הנ"ל מקבילים גם למעצרים רציונליים.

חוקי חזקה ממשיים

רציונלי: אם $a > 0$, $a \neq 1$, $r_n \rightarrow 0$ סדרה של מספרים רציונליים, אז $a^{r_n} \rightarrow 1$

פונקציה: נוכחים עבור $a > 1$. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ $\bar{a}^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ $\bar{a} = \frac{1}{a}$

$$\text{ידי } 0 < \varepsilon. \text{ קיים } n_0 \text{ כך ש- } 1 - \varepsilon < \bar{a}^{\frac{1}{n_0}} < 1 < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$$

$$\text{מכיוון ש- } r_n \rightarrow 0, \text{ קיים } N \text{ כך שלכל } n > N, |r_n| < \frac{1}{n_0}$$

$$\text{BP } n > N, -\frac{1}{n_0} < r_n < \frac{1}{n_0} \Leftrightarrow a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \bar{a}^{\frac{1}{n_0}} < a^{r_n}$$

מעצמי: ידי סדרה $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מסתירה רציונלית ממשיים

$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ הסדרה $(a^{r_n})_{n=1}^{\infty}$ מסתירה. הסדרה $r_n \rightarrow r$

אם תלוי בסדרה $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ אז רק בסדרה r .

$$a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \quad \text{המעצמי:}$$

הוכחה: (א) עכשיו שהמעצמי $(a^{r_n})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה קוסי.

המעצמי $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה, כלומר, קיים M כזה כך ש- $|r_n| \leq M$

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_n} |1 - a^{r_m - r_n}| \quad \text{BP } n. \text{ ענין בהיך } a > 1$$

$$\leq a^M \cdot |1 - a^{r_m - r_n}|$$

$$\text{BP } \varepsilon > 0, \text{ קיים } n_0 \text{ כך ש- } -\frac{\varepsilon}{a^M} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^M}$$

... כיוון $\epsilon = (r_n)_{n=1}^\infty$ זכור, היה סדר קטן, ϵ קטן N

$$|r_m - r_n| < \frac{1}{N_0}, \quad m, n > N \text{ כל } \epsilon$$

$$-\frac{1}{N_0} < r_m - r_n < \frac{1}{N_0} \quad \text{כל } m, n \text{ כל, כל}$$

$$1 - \frac{\epsilon}{a^M} < a^{r_m - r_n} < 1 + \frac{\epsilon}{a^M}$$

$$|1 - a^{r_m - r_n}| < \frac{\epsilon}{a^M} \Rightarrow |a^m - a^n| < a^M \cdot \frac{\epsilon}{a^M} = \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} \text{ כל } r_n \rightarrow r \text{ כל } s_n \rightarrow r$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n - s_n} = 1 \quad \text{כל } r_n - s_n \rightarrow 0$$

אם $a^{r_n} \rightarrow a^r$ כל $a > 0$, $a \neq 1$, $r_n \rightarrow r$ כל r כל $a > 0$, $a \neq 1$

הוכחה: נניח $a > 1$. ניקח $\epsilon > 0$ כל $\delta > 0$ כל $r_n \rightarrow r$ כל r כל $a > 0$, $a \neq 1$

$$s_n - q_n < \frac{1}{n} \quad \text{כל } n \text{ כל } q_n < r_n < s_n$$

$$a^{q_n} < a^{r_n} < a^{s_n} \quad \text{כל } a^{q_n} \rightarrow a^r \quad \text{כל } a^{s_n} \rightarrow a^r$$

$$a^{r_n} \rightarrow a^r \quad \text{כל } a > 0, a \neq 1, a_n \rightarrow a$$

במיוחד, הפונקציה $f(x) = x^r$ היא פונקציה רציפה. (הוכחה 20.9)

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$$

הוכחה: נניח $a > 1$

$$a^{r+s} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n + s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^r \cdot a^s$$

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r$$

הוכחה: נניח $a > 1$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

הוכחה: נניח $a > 1$

$$(a^r)^s = \lim_{k \rightarrow \infty} (a^r)^{s_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{r \cdot s_k} = a^{r \cdot s}$$

5 (ב) הוכחה: נניח $a > 1$

$$(a^r)^s = (\lim_{k \rightarrow \infty} a^{rk})^s = \lim_{k \rightarrow \infty} ((a^{rk})^s) = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{rk \cdot s} = a^{r \cdot s}$$

$$a > 1 \quad \text{כל } x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \text{אנחנו: } a > 1$$

$$a^n \rightarrow \infty \quad \text{כל } n \rightarrow \infty \quad \text{אנחנו: } a > 1 \quad \text{כל } x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$n \leq x < n+1, \quad \text{אנחנו: } n \in \mathbb{N}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \rightarrow e \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$(t > 0) \quad x \rightarrow \infty \quad \frac{x}{t} \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\frac{x}{t}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{t}} = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$$

$$\text{אנחנו: } t < 0, \quad \text{אנחנו: } t < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e} \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$\left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\right] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = 1 \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4} \geq 1 \quad \left(\text{אנחנו: } x \in \mathbb{R} \right)$$

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x \geq \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x} = \left[\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right]^{2/x} \rightarrow 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \rightarrow \frac{1}{e} \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = e \quad \text{אנחנו: } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\frac{x}{t}} = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t \quad \text{אנחנו: } t < 0, \quad \text{אנחנו: } t < 0$$