

קבוצות

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

יחס קבוצה A הוא קבוצה  $A \times A$ .

הקבוצה הקרובה  
...  $B \rightarrow A$

לכל: היחס "a < b" המסדר הממשי הוא

קבוצה  $\{(a,b) : a < b\}$

הקבוצה הממשיים:  $\mathbb{R}$  מוסדר יחס  $<$  המקיים:

הקבוצה  $\mathbb{R}$  היא קבוצה סגורה תחת חיבור וחיסור.

המקסימום:  $a < b, b < a, a = b$

הקבוצה הממשיים: אם  $a < b$  אז  $a < c$  ו-  $b < c$

הקבוצה הממשיים: אם  $a < b$  ו-  $c \in \mathbb{R}$  אז  $a + c < b + c$

הקבוצה הממשיים: אם  $a < b$  ו-  $c > 0$  אז  $a \cdot c < b \cdot c$

אם  $a > 0$  אז

אם  $a < b$  אז  $b > a$

אם  $a < 0$  אז

אם  $a < b$  ו-  $a = b$

אם  $a \geq 0$  אז

הקבוצה הממשיים היא קבוצה סגורה תחת חיבור וחיסור.

$a < b \leq c \leq d < e \Rightarrow a < e$

הקבוצה הממשיים: (הקבוצה הממשיים) אם  $a < b$  ו-  $c < d$  אז  $a + c < b + d$

אם  $a < b$  אז  $a + c < b + c$

אם  $a + c < b + c$  אז  $b + c < b + d$

אם  $b + c < b + d$  אז  $a + c < b + d$

אם  $a + c < b + d$  אז  $a + c < b + d$

הקבוצה הממשיים: (הקבוצה הממשיים) אם  $a > b > 0$  ו-  $c > d > 0$  אז  $a \cdot c > b \cdot d$

הקבוצה הממשיים: אם  $a > b$  ו-  $c > d$  אז  $a \cdot c > b \cdot d$



אם ורק אם

אם: (היפוך כיוון אי שוויון)  $a > b$  אם  $-a < -b$

הוכחה: נניח  $a > b$  ונכתוב  $-a < -b$ .

נניח שלא מתקיים  $-a < -b$ , אז  $-a = -b$  או  $-a > -b$ .

אם  $-a = -b$  אז  $a = b$ , בסתירה להקדמת השוויון.

אם  $-a > -b$  אז נכתוב שוויון  $b > a$  ונקבל סתירה בסתירה לשוויון.

הכיוון ההפוך: אם  $-a < -b$  אז  $-b > -a$ .

ע"פ השוויון שכתבנו,  $a > b \Leftrightarrow -(-b) < -(-a)$ ,  $b < a \Leftrightarrow a > b$ .

אם: אם  $b > a$  ו-  $c < 0$  אז  $ac < bc$ .

הוכחה:  $c < 0 \Leftrightarrow -c > 0$

$$-ca > -cb$$

$$cb > ca \Rightarrow ac < bc$$

חוקי הסימנים:

(א) אם  $a > 0, b > 0$  אז  $a+b > 0$  ו-  $ab > 0$

(ב) אם  $a < 0, b < 0$  אז  $a+b < 0$  ו-  $ab > 0$

(ג) אם  $a < 0, b > 0$  אז  $ab < 0$

הסקנה:  $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$ , אם  $a^2 = 0$  אז  $a = 0$ .

הוכחה: לפי השוויון, אם  $a > 0$  או  $a < 0$ ,

ע"פ חוקי הסימנים אז  $a < 0$  או  $a > 0$  אז  $a^2 > 0$ .

הסקנה:  $0 < 1$  (כי  $1^2 = 1 > 0$ )

הסקנה:  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$ , מספר טבעי  $n$ .

הוכחה: האינדוקציה, אם  $n > 0$  אז  $n+1 > 0$ .

הסקנה: לא ניתן להחזיר יחס סדר על השדה בין שני האיברים, כי

$$1+1 = 0 \text{ מתקיים}$$



אם:  $a > 0$  אז  $\frac{1}{a} > 0$  .

הוכחה: נניח  $\frac{1}{a} \leq 0$  .  $\frac{1}{a} \neq 0$  (  $0 \cdot a = 0 \neq 1$  )

לכן  $\frac{1}{a} < 0$  . נכפול במספר החיובי  $a$  נקבל  $1 < 0$  , סתירה.

אם:  $a > b > 0$  אז  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

אם:  $a > b > 0$  אז  $a^2 > b^2$

אני שוויון ברנולי: אם  $n$  מספר טבעי,  $x \in \mathbb{R}$  ,  $x \geq -1$  , אז  $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$n=1 \quad (1+x)^1 = 1+x$$

הוכחה: באינדוקציה ב- $n$ .

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

נניח שמתקיים עבור  $n$ :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + \underbrace{nx+x+nx^2}_{(n+1)x} \geq 1+(n+1)x$$

נכפול ב-  $1+x \geq 0$  .

$$\geq 1+(n+1)x$$

אם:  $x > 0$  אז  $x + \frac{1}{x} \geq 2$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

הוכחה:

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$$

נכפול ב-  $\frac{1}{x}$  .

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

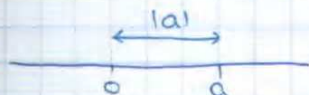
אם:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  מספרים חיוביים המקיימים  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$  , אז

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq n$$



הערך המוחלט

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \text{ כל} \\ -a & a < 0 \text{ כל} \\ 0 & a = 0 \text{ כל} \end{cases}$$



תכונות:

 $a \in \mathbb{R}$  כל,  $|a| \geq 0$ , שוויון רק  $a=0$  כל

סימנים: חלקי  $\sim$  קבוצה  $a > 0$  כל,  $(|a|=a > 0 \text{ כל})$ ,  $(|a|=0 \text{ כל}) a=0$ ,

 $a < 0$  כל,  $(|a|=-a > 0 \text{ כל})$ 

$$|ab| = |a| \cdot |b| \quad (א)$$

$$|a| = |-a| \quad (ב)$$

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad (ג)$$

$$|a| = \max(a, -a) \quad (ד)$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad (1) \text{ כל שוויון טריגונומי}$$

בנוסף:  $a \leq |a|$ ,  $b \leq |b|$

$$\Rightarrow a+b \leq |a| + |b|$$

$$-|a| \leq a \Rightarrow -a \leq |a|, \quad -b \leq |b|$$

$$-(a+b) \leq |a| + |b|$$

$$|a+b| = \max(a+b, -(a+b)) \leq |a| + |b|$$

המרחק בין הנקודות  $a$  ו- $b$  הוא  $d(a, b) = |a - b|$

טריגונומי: כל שוויון טריגונומי 2:  $a, b, c \in \mathbb{R}$  כל  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

$$d(a, c) = |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c| =$$

בנוסף:

$$= d(a, b) + d(b, c).$$

$$|x+1| + |x+7| \geq 10 \quad \text{טריגונומי}$$

$$x \leq -7: \quad x+7 \leq 0 \quad x+1 \leq 0$$

$$-(x+1) + (-x-7) \geq 10 \Leftrightarrow -2x-8 \geq 10 \Leftrightarrow -2x \geq 18 \Leftrightarrow x \leq -9$$



$-7 \leq x \leq -1: \quad x+7 \geq 0, \quad x+1 \leq 0$

$-(x+1) + x+7 \geq 10$

$x \geq -1: \quad x+7 \geq 0, \quad x+1 \geq 0$

$x+1+x+7 \geq 10 \iff 2x \geq 2 \iff x \geq 1$

$\{x: x \geq 1 \text{ ו- } x \leq -9\}$  פתרון:

סיון תעדים בדישה

$[a,b] = \{x: a \leq x \leq b\}$  תעדים הסגור של  $a$  ו- $b$

$(a,b) = \{x: a < x < b\}$  תעדים הפתוח של  $a$  ו- $b$

$[a,b) = \{x: a \leq x < b\}$

$[a,\infty) = \{x: x \geq a\}$

$(-\infty, a) = \{x: x < a\}$

$\{x \geq 1 \text{ ו- } x \leq -9\} =$   
 $= (-\infty, -9] \cup [1, \infty)$

תכונות של תעדים

אם  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  כך ש-  $a \in A, b \in B$  ו-  $a \leq b$  אז  $A \leq B$ .  
כלומר:  $a \in A$  לכל  $a \in A$  ולכל  $b \in B$  נכון  $a \leq b$ .

אם  $a \in A$  לכל  $a \in A$  ולכל  $b \in B$  נכון  $a \leq b$  אז  $A \leq B$ .

אם  $A, B$  קבוצות של מספרים ממשיים, אז  $A \leq B$  אם ורק אם  $A \leq B$ .

$A \leq \{x\} \leq B$  נכון אם  $x \in \mathbb{R}$  ו-  $A \leq B$ .

$A = \{x: x > 0, x^2 < 2\}$   $B = \{x: x > 0, x^2 > 2\}$

$A \leq B$  נכון:

אם  $a \leq b$  אז  $a^2 < 2, b^2 > 2$  ו-  $a, b > 0$ .

אם  $a^2 < 2 < b^2$  אז  $a^2 > b^2$  ו-  $a > b$  נכון.

אם  $x=3$  אז  $A=[2,3]$   $B=[3,4]$  נכון.



אם:  $x > 0$  ו- $x^2 < 2$  אז  $\varepsilon > 0$  כך  $(x+\varepsilon)^2 < 2$  - e

$$(x+\varepsilon)^2 = x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$(x+\varepsilon)^2 < x^2 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 \quad x < 2$$

$$(x+\varepsilon)^2 < x^2 + 4\varepsilon + \varepsilon = x^2 + 5\varepsilon = 2 \quad \varepsilon \leq 1$$

$$\varepsilon = \frac{2-x^2}{5}$$

$$\varepsilon = \min\left(\frac{2-x^2}{5}, 1\right)$$

אם:  $x > 0$  ו- $x^2 > 2$  אז  $\varepsilon > 0$  כך  $(x-\varepsilon)^2 > 2$  - e

$$(x-\varepsilon)^2 = x^2 - 2x\varepsilon + \varepsilon^2 > x^2 - 2\varepsilon x$$

$$(x-\varepsilon)^2 \geq 2 \Leftrightarrow x-\varepsilon \geq \sqrt{2} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$2\varepsilon x \leq 4\varepsilon \quad x \leq 2$$

$$-2\varepsilon x \geq -4\varepsilon$$

$$x^2 - 2\varepsilon x \geq x^2 - 4\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{x^2-2}{4}$$

$$(x-\varepsilon)^2 = x^2 - 2x\varepsilon + \varepsilon^2 > x^2 - 4\varepsilon = 2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{x^2-2}{4}$$

$$\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2-2}{4}\right)$$

אם:  $x^2 = 2$  אז  $x > 0$  ו- $x^2 = 2$

$$A = \{x : x > 0, x^2 < 2\} \quad B = \{x : x > 0, x^2 > 2\}$$

כדי שכל  $x \in A$  יהיה  $x \in B$  אז  $A \subseteq B$  - e

$$A \subseteq \{x\} \subseteq B$$

נבדוק:  $x^2 = 2$

אם  $x^2 < 2$  ו- $x^2 > 2$  אז  $x^2 \neq 2$

אם  $x \in A$  ו- $x^2 < 2$  אז  $x \in A$  ו- $x^2 < 2$

אם  $x \in A$  ו- $x^2 < 2$  אז  $x \in A$  ו- $x^2 < 2$

אם  $x \in B$  ו- $x^2 > 2$  אז  $x \in B$  ו- $x^2 > 2$

אם  $x \in B$  ו- $x^2 > 2$  אז  $x \in B$  ו- $x^2 > 2$



אסנף: קיים  $x > 0$  יחיד המקיים  $x^2 = 2$ .

הוכחה: אם  $x \neq y$  ( $y > 0, x > 0$ )  $x^2 = y^2 = 2$  אז  $x > y$  או  $x < y$ .

אם  $x^2 < y^2$  אז  $x < y$ .

למספר היחיד המקיים  $x^2 = 2$ ,  $x > 0$ , נקרא  $\sqrt{2}$ .

הסקה:  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

משפט:  $\mathbb{R}$  מכיל את  $\mathbb{Q}$  וקיים  $a \geq 0$  קיים  $x \geq 0$  יחיד המקיים  $x^n = a$ .

כאן  $x$  נקרא  $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ .

אסנף:  $x, y \geq 0$  ב  $\mathbb{R}$   $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \sqrt{y}$ .

הוכחה:

$$(\sqrt{x} \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 (\sqrt{y})^2 = xy$$

$$\sqrt{x} \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

אם  $x_1, \dots, x_n > 0$  אז:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

הוכחה: נסמן  $y_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}$   $1 \leq i \leq n$

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n})^n} = 1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}} \geq n \Rightarrow \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

גבול: אולי נדע:

ב  $\mathbb{R}$  מספר ממשי  $x$  קיים מספר טבעי  $n$  כך ש-  $n > x$ .  
 סנפול  $\mathbb{R}$  מספר ממשי  $x$  יש מספר שלם יחיד  $n$  כך ש-  $n \leq x < n+1$ .  
 (לנוכחים שלבים)  
 (למספר  $n$  קוראים החלק שלם של  $x$ ,  $n = [x]$ )



הוכחה: נניח ראשון  $n < m$ .

$$\begin{aligned} m < n+1 &\Leftrightarrow m \leq X < n+1 \text{ שכן } n \leq X < n+1 \text{ אם } X \text{ שלם} \\ n < m+1 &\Leftrightarrow n \leq X < m+1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \neg (n-m < 1) \Rightarrow n-m = 0 \Rightarrow n=m$$

נניח קיים.

אם  $x$  מספר שלם, עבור  $(n=x)$ .

אם  $x$  לא שלם, נניח  $x > 0$ . ע"פ ארכימדיס  $0 < x < m$  עבור מספר טבעי.

$$A = \{n : n \leq x, n \text{ מספר שלם}\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

לכן,  $A$  קבוצה סופית, לכן יש ב- $A$  איבר בעל סדר.

$$n \leq x < n+1 \Leftrightarrow n+1 > x \text{ ו- } n \leq x \text{ אם } (n+1 \notin A)$$

אנחנו:  $a, b$  מספרים רציונליים  $a < b$  ו- $q \in \mathbb{Q}$  המקיים  $a < q < b$ .

אנחנו צריכים: אם  $b-a > 1$  יש מספר שלם  $n$  המקיים  $a < n < b$ .

הוכחה: אם  $b$  שלם  $b-1 = n$ . אחרת  $n = [b]$ .

$$n \leq b \leq n+1 \Rightarrow n > b-1 > a$$

הוכחה: נניח  $a > b$ . יפני  $N$  מספר טבעי המקיים  $N > \frac{1}{b-a}$ .

$$Nb > Na$$

$$Nb - Na = N(b-a) > \frac{b-a}{b-a} = 1$$

ע"פ אנחנו הצגנו, יש מספר  $m \in \mathbb{Z}$  המקיים  $Na < m < Nb$ .

האפשרות: קבוצה  $A$  קטנה קבוצה צמודה ב- $\mathbb{R}$  אם  $a < b$  ו- $x \in A$ .

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

המקיים  $a < x < b$ .

$$\Leftrightarrow \mathbb{Q} \text{ צמודה ב- } \mathbb{R}.$$