

ס. סיונים מורה הקבוצה

$$\{x \in \mathbb{N} : 2|x\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$= \{2x : x \in \mathbb{N}\}$$

$$a \in A$$

$$a \notin A$$

קבוצה = אוסף של איברים

"a איבר של הקבוצה A"

"a איננו - A"

הקבוצה הריקה $\emptyset$

יחסי הכלה בין קבוצות

$$A \subseteq B : A \text{ מוכלת ב- } B$$

אם B איבר של A הוא איבר של B

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{כלומר: אם}$$

$$\emptyset \subseteq A, A \subseteq \emptyset$$

$$A \subset B : A \text{ מוכלת ממש ב- } B$$

$$A \neq B \quad \text{ואם} \quad A \subseteq B$$

$$A = B : \text{אם ורק אם} \quad A \subseteq B \quad \text{ואם} \quad B \subseteq A$$

1. המספרים הממשיים

$\mathbb{R}$ מספרים ממשיים = מרחב המספרים הממשיים (כאן: מרחק, אורך, זמן, ...)

$\mathbb{Z}$ מספרים שלמים = מרחב המספרים השלמים (כאן: מס' טורגים, כיתוב).

$\mathbb{Q}$ מספרים רציונליים = מספרים מהצורה $\frac{a}{b}$ כאשר a, b שלמים, $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

משפט: קיים מס' רציונלי q המקיים $q^2 = 2$.

הוכחה: נניח, בדיוק ההפך, שקיים $q = \frac{m}{n}$ המקיים $q^2 = 2$.

$$q^2 = 2 \quad \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad m^2 = 2n^2$$

B מס' שלם נניח לפחות בצורה יחידה לפורמליזם האמיתי.

לכן, B מספר שלם נניח לפחות בצורה יחידה $2^4 \cdot a$

נניח a מספר טבעי $a \geq 1$ ו- $u \geq 0$ מספר טבעי.

$$m = 2^u \cdot a \quad n = 2^v \cdot b \quad 2 \nmid a \vee b$$

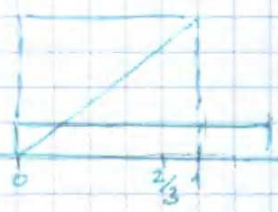
$$2^{2u} \cdot a^2 = 2^{2v+1} \cdot b^2 \quad \text{סותר!} \quad 2u = 2v+1$$

הוכחה אחרת: נניח, כמו קודם, $m^2 = 2 \cdot n^2$ נניח m זוגי $\frac{m}{2} = n^2$

כיון ש- $3 \nmid m$.

$$m^2 \text{ זוגי} \Rightarrow m \text{ זוגי} \Rightarrow 4 \mid m^2 \Rightarrow 4 \mid 2n^2 \Rightarrow 2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$$

סותר! n זוגי $\Rightarrow$ n^2 זוגי.



קבוצת המספרים הממשיים היא

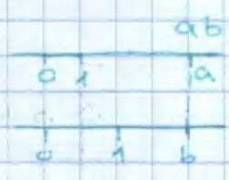
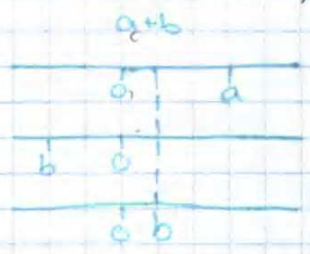
קבוצת המספרים הממשיים

המחלקת את המספרים הממשיים לזוגיים ולאי-זוגיים. קבוצת המספרים הממשיים היא $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

הממשיים. $\mathbb{R}$ הוא

ב- $\mathbb{R}$ מוגדרים $+$, $\cdot$ ו- $<$ כמובן.



ב- $\mathbb{R}$ הממשיים יש מספר $x < y$.



$$= (\mathbb{R}, <, \cdot, +)$$

המספרים $+$, $\cdot$ הם

המספרים $<$ הם

המספרים

אקסיומט = R קבוצת המספרים האינפיניטסימליים, 1, 0

$a, b \in \mathbb{R}$ BP ואינפיניטסימליים $+$, $\cdot$ חוקי החבורה:

(א) חבורה: $a+b = b+a$ (חלופיות)

(ב) אסוציאטיביות: $(a+b)+c = a+(b+c)$ (קישוריות)

(ג) איבר נייטרלי: $a \in \mathbb{R}$ BP $0+a = a$

(ד) קיום איבר נגדי: $a \in \mathbb{R}$ BP $a+b = 0$ $b \in \mathbb{R}$ הנקרא $-a$

כפל: (א) קומוטטיביות: $ab = ba$ (חלופיות)

(ב) אסוציאטיביות: $(ab)c = a(bc)$ (קישוריות)

(ג) איבר נייטרלי: $1a = a$

(ד) קיום איבר הפוך: $a \neq 0$ BP $a \cdot b = 1$ $b \in \mathbb{R}$ נקרא a^{-1}

חוק הפילוח (דיסטריביוטיביות): $a(b+c) = ab+ac$

מסקנה: מהאקסיומט

חוק הפילוח: $a+b = a+c$ $\Leftrightarrow b=c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ אם

הוכחה: יהי d איבר נגדי $-a$. $a+d=0$

$d+a=0$ חבורה קומוטטיביות

$d+(a+b) = d+(a+c) \Rightarrow (d+a)+b = (d+a)+c$
חלופיות

$0+b = 0+c$

$b=c$ מהאקסיומט חלופיות

אז: $a \in \mathbb{R}$ BP יש איבר נגדי יחיד.

הוכחה: נניח $a+b=0$ וכן $a+b'=0$ $b, b' \in \mathbb{R}$

$a+b=0 \Rightarrow a+b=a+b' \Rightarrow b=b'$
חוק הפילוח

השקפה: האוסר הנכס a שווה $-a$.

חוק הצ'ינג'ה: אם $ab = ac$ ואם $a \neq 0$ אז $b = c$.

חוק $\mathbb{R}$ איבר $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ יש תופכי יחיד.

תופכי זה שווה a^{-1} .

$$a - b = a + (-b) \quad \text{הצ'ינג'ה:}$$

$$(b \neq 0) \quad \frac{a}{b} = a \cdot (b^{-1})$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad \text{אנחנו:}$$

$$0 = 0 + 0$$

בוכחה:

$$(0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a$$

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$$

חוק החילוק

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \quad \text{איבר נייטרל בחיבור + חלופיות}$$

$$0 \cdot a = 0$$

ע"פ הצ'ינג'ה.

$$-(-a) = a \quad \text{אנחנו:}$$

$$(-a) + -(-a) = 0$$

בוכחה:

$$(-a) + -(-a) = a + (-a)$$

איבר נייטרל

$$(-a) + -(-a) = (-a) + a$$

חוק החלופיות

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

$$-(-a) = a$$

ע"פ הצ'ינג'ה.

$$(-1) \cdot a = -a \quad \text{אנחנו:}$$

$$(-1) + 1 = 0$$

בוכחה:

$$((-1) + 1)a = 0a = 0$$

$$(-1)a + a = 0$$

$$(-1)a = -a$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

חדש 1
הצורה של תצורה מכונה אינדקס:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n.$$

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

הצורה:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ פעמים}} = \prod_{i=1}^n x$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

סעיף:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

הוכחה:

$$= a(a+b) + b(a+b)$$

$$= (a+b)a + (a+b)b$$

$$= aa + ba + ab + bb = a^2 + ab + ab + b^2 =$$

$$= a^2 + 1 \cdot ab + 1 \cdot ab + b^2 = a^2 + (1+1)ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$b=0 \text{ או } a=0 \text{ שכן } ab=0$$

סעיף:

$$b \neq 0 \text{ ואם } a \neq 0 \text{ אז } a^{-1} \cdot a = 1$$

הוכחה: נניח, כשלא, אז $a=0$ וזה נגד $a \neq 0$.

$$a^{-1}(ab) = 0 \text{ , } a^{-1} \cdot a = 1 \text{ , } \text{הוכחה: } a^{-1} \cdot a = 1$$

$$(a^{-1} \cdot a) b = 0$$

$$1 \cdot b = 0$$

$$b = 0$$

סעיף:

$$ab \neq 0 \text{ שכן } b \neq 0 \text{ ואם } a \neq 0$$

הוכחה:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ שכן } b, d \neq 0$$

סעיף:

$$(b^{-1})a + (d^{-1})c = (bd)^{-1}(ad+bc) \text{ -e } \beta$$

הוכחה:

$$(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1} \text{ שכן } b, d \neq 0$$

סעיף:

$$(b^{-1}d^{-1})(bd) = d^{-1}(b^{-1}bd) =$$

הוכחה:

$$= d^{-1} \cdot 1 \cdot d = d^{-1} \cdot d = 1 \Rightarrow b^{-1}d^{-1} = (bd)^{-1}$$

$$(bd)^{-1}(ad+bc) = (b^{-1}d^{-1})(ad+bc)$$

הוכחה:

$$= b^{-1}d^{-1}ad + b^{-1}d^{-1}bc = b^{-1}a \underline{d^{-1}d} + \underline{b^{-1}b} d^{-1}c =$$

$$= b^{-1}a + d^{-1}c$$