

$$f(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} f(y_0) \text{ ש"ל } y_0 \text{ - רצפה } f^{-1} \text{ } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} y_0 \text{ א"ל (1) } \text{אם}$$

$$g(x) \neq y_0, x > M_0 \text{ ב"ל ב"ל } M_0 \text{ קיים } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} y_0 \text{ א"ל (2)}$$

$$f(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} L \text{ ש"ל } f(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} L \text{ - 1}$$

$$\text{הוכחה: (1) } \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0) \text{ כי } f \text{ רציפה ב- } y_0.$$

$$\text{ב"ל } \epsilon > 0 \text{ קיים } \delta > 0 \text{ ש"ל } 0 < |y - y_0| < \delta \text{ אם}$$

$$|f(y) - f(y_0)| < \epsilon \text{ (ש"ל } |y - y_0| = 0 \text{ אז } f(y) = f(y_0) \text{)}$$

$$|f(y) - f(y_0)| < \epsilon \text{ כיון } y = g(x) \text{ קיים } M > 0 \text{ ב"ל}$$

$$|g(x) - y_0| < \delta, x > M \text{ ב"ל } x \text{ כזה, } \delta \text{ (רצפה } y = g(x) \text{)}$$

$$|f(g(x)) - f(y_0)| < \epsilon,$$

$$\text{ב"ל (2) } \epsilon > 0 \text{ יש } \delta > 0 \text{ ש"ל } 0 < |y - y_0| < \delta \text{ אם}$$

$$|f(y) - L| < \epsilon \text{ קיים } M_1 \text{ ב"ל } M, x > M, |g(x) - y_0| < \delta$$

$$M = \max(M_0, M_1) \text{ אם } x > M \text{ ש"ל } g(x) \neq y_0$$

$$\text{ואם } |g(x) - y_0| < \delta \text{ , } |f(g(x)) - L| < \epsilon \text{ , } 0 < |g(x) - y_0| < \delta \text{ , } |g(x) - y_0| < \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(0) = 0 \text{ , } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ , } \sin x \text{ רציפה ב- } 0 \text{ , } \text{א"ל}$$

$$\text{ב"ל } \frac{1}{x} \neq 0 \text{ , } x > 0 \text{ , } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

משפטים על פונקציות רציפות בקצת סגור

משפט: (וירשטראס כראשון)

פונקציה רציפה בקצת סגור, חסומה בו.

(פונקציה $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת חסומה אם קיים M כזה ש- $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in I$)

הוכחה: נכים שהפונקציה f חסומה לסיף (למה, שקיים M כזה ש-

$$f(x) \leq M \text{ ב"ל } x \in [a, b]$$

נניח כשאלה ש- f אינה חסומה לסיף.

... כל $\epsilon > 0$ קיים $x_n \in [a, b]$ כך $f(x_n) > n - \epsilon$.

כל n , $a \leq x_n \leq b$ ולכן הסדר $(x_n)_{n=1}^\infty$ מוגדר.

ע"ש משפט בולצנו-וירסטרס, יש סדר-מתכנס $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$.

$x_{n_k} \rightarrow L$. כיון $a \leq x_{n_k} \leq b$ כל $L \in [a, b]$.

כיון f רציפה, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(L)$.

כל n , $f(x_{n_k}) > n_k \geq n$ ולכן $f(x_{n_k}) \rightarrow \infty$. סתירה.

הערה: ג'מי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $x_0 \in I$.

x_0 נקראת נקודת מקסימום של f בקטע I אם כל

$f(x) \leq f(x_0)$, $x \in I$. (מקסימום מطلق).

משפט: (וירסטרס השני)

לפונקציה רציפה בקטע סגור יש נקודת מקסימום ונקודת מינימום.

הוכחה: אם f רציפה בקטע $[a, b]$, אז ע"ש וירסטרס ב-1, f חסומה.

נסמן $M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$.

כל n , קיים $x_n \in [a, b]$ כך $f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$.

ובנוסף מתקיים $f(x_n) \leq M$. הסדר $(x_n)_{n=1}^\infty$ חסומה,

יש סדר-מתכנס $x_{n_k} \rightarrow L$, כיון $a \leq x_{n_k} \leq b$ כל $L \in [a, b]$.

כיון f רציפה, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(L)$.

מצד שני, $M - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq M$, כל $n_k \rightarrow \infty$.

לכן ע"ש משפט הסנדוויץ', $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$. ולכן $f(L) = M$.

משפט: (ערק הביניים)

ג'מי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ויהי t מספר בין

$f(a)$ ו- $f(b)$. (כלומר, $f(a) \leq t \leq f(b)$ או $f(b) \leq t \leq f(a)$).

אז קיים $c \in [a, b]$ כך $f(c) = t$.

הוכחה: נניח ראשון $t=0$ אז $f(a)=0$ או $f(b)=0$ או $f(c)=0$ ונניח $c=a$ ונניח $c=b$ ונניח $c=c$.

אם $f(a)=0$ או $f(b)=0$ או $f(c)=0$ אז $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ או $f(a) \cdot f(c) \leq 0$ או $f(b) \cdot f(c) \leq 0$ ונניח $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) \leq 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) \leq 0$.

נניח $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.
אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

$$\forall n \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$$

$$0 \leq f(c)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

אם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז $f(a) \cdot f(b) < 0$ ונניח $f(a) \cdot f(c) < 0$ ונניח $f(b) \cdot f(c) < 0$.

הוכחה: נבחר $f(t) = t^n$. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$.

לכן קיים b כך ש- $b^n > x$ נקח $a=0$.

ע"פ משפט הביניים, $f(a) \leq x \leq f(b)$.

קיים t כך ש- $f(t) = x$ $\Leftrightarrow t^n = x$.

הערה: קודם x המקסימום $f(x)=0$ נקטור שיש לו הנקודות f .

משפט: לכל פולינום ממעלה n וזוגי יש שורש ממשי.

הוכחה: יהי $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ כאשר n זוגי.

1- $a_n \neq 0$.

נניח בהכרח ש- $a_n > 0$. נכתוב $P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)$.

$$P(x) = x^n \cdot Q(x)$$

$$\begin{array}{ccc} x^n \rightarrow \infty & Q(x) \rightarrow a_n > 0 & \Rightarrow P(x) \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty & & \\ x^n \rightarrow -\infty & Q(x) \rightarrow a_n > 0 & \Rightarrow P(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow -\infty & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P(x_1) < 0 & \text{כך ש-} & x_1 \\ P(x_2) > 0 & \text{"} & x_2 \end{array} \quad \Leftarrow$$

ע"פ משפט הביניים, קיים t בין x_1 ל- x_2 כך ש- $P(t) = 0$.