

$$\dots \text{ ו } n \text{ כזה ש } |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\text{לכן, } f(x_n) \rightarrow f(a)$$

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{אם } x \text{ רציונלי} \\ 1 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

פונקציה דיסקרטיבית.

אם  $D(x)$  לא כזה שיש קושר.

הוכחה: אם  $a$  קושר לבדו, נניח של קיים  $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$

$$L = \lim_{x \rightarrow a} D(x)$$

נניח שקיים מספר

עבור סדרה  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow a$ , בואו נבדוק:

$$a < x_n < a + \frac{1}{n} \quad x_n \in (a, a + \frac{1}{n}) \quad \text{כל } n, \text{ נבחר } x_n \text{ רציונלי}$$

$$a < y_n < a + \frac{1}{n} \quad y_n \in (a, a + \frac{1}{n}) \quad \text{כל } n, \text{ נבחר } y_n \text{ אי-רציונלי}$$

$$\downarrow$$

$$x_n \rightarrow a \quad y_n \rightarrow a \quad (\text{סדרות})$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1 \quad \text{לכן } y_n \neq a, x_n \neq a$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{אם } x \text{ רציונלי} \\ 1 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

פונקציה דיסקרטיבית.

$f$  כזה שכל  $x$  רציונלי,  $f(x) = 0$   
 $f$  לא כזה שכל  $x$  אי-רציונלי,  $f(x) = 1$

$$f(x) = [x]$$

פונקציה:

$f$  כזה שכל  $x$  שלם,  $f(x) = x$   
 $f$  לא כזה שכל  $x$  אי-שלם,  $f(x) = \lfloor x \rfloor$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \quad \text{אם } f, g \text{ פונקציות ש } g \text{ קושר ב } x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(y_0) \quad \text{אם } f \text{ כזה ש } x_0 \text{ ב } x_0$$

הוכחה: יהי  $\varepsilon > 0$ . קיים  $\delta_1$  כך שכל  $|y - y_0| < \varepsilon$  אז  $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$

$$\left( \begin{array}{l} \text{אם } \delta > 0 \text{ כך שכל } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ אז } |g(x) - y_0| < \delta_1 \\ \text{אם } g(x) \rightarrow y_0 \end{array} \right) \quad \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$$

$$\text{לכן } f(g(x)) \rightarrow f(y_0) \quad \text{אם } x \rightarrow x_0$$

משפט: אם  $g(x)$  נצפה בקורה  $x_0$  ו-  $f(x)$  נצפה בקורה  $g(x_0)$

ואז  $f(g(x))$  נצפה בקורה  $x_0$ .

לדוגמה,  $f(x)$  נצפה בקורה  $x_0$  ואם  $h$  מסתכל

נצפה בקורה  $h=0$ .

משפט: אם  $f, g$  פונקציות משמשות נקודה  $x_0$  ו-  $y_0$  כך  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$  ו-  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = L$

ואם קיימת סביבה  $\delta$  של  $x_0$  שבה  $g(x) \neq y_0$  אז  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$  שכן  $g(x) \rightarrow y_0$  ו-  $f(y) \rightarrow L$  כ-  $y \rightarrow y_0$ .

$$g(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

דוגמה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 100 & x = 0 \end{cases}$$

נצפה בפונקציות באינטואיטיביות

$$(180^\circ = \pi) \quad \forall x > 0 \quad \sin x < x$$

$$\forall -\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \sin x = -\sin(-x) \geq x$$

$$\Rightarrow |\sin x| \leq |x|$$

משפט:  $\sin x$  נצפה בקורה  $x=0$ .

$$(-|x| < \sin x \leq |x|), \text{ הטנקוויץ'}$$

משפט:  $\cos x$  נצפה בקורה  $x=0$ .

בוכנה:

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) = 1 - 2 \cdot 0^2 = 1 = \cos 0$$

לכן,  $\cos$  נצפה בקורה 0.

משפט:  $\sin, \cos$  הן פונקציות רציפות ב  $\mathbb{R}$  ב  $\beta_0$ .

הוכחה: נסתק לפונקציה  $\sin$  ב  $x_0$ , הפונקציה  $f(h) = \sin(x_0 + h)$

הפונקציה  $g(h) = \cos(x_0 + h)$  נסתק ב  $h=0$ .

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sin x_0 \cos 0 + \cos x_0 \sin 0 = \sin x_0$$

$$\cos(x_0 + h) = \cos x_0 \cos h + \sin x_0 \sin h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x_0 \cos 0 + \sin x_0 \sin 0 = \cos x_0$$

משפט:  $\tan x$  רציפה ב  $\beta_0$  עבור הסדרה  $(\cos x \neq 0 \text{ על } \beta_0, \text{ ו-} \beta)$

$$\frac{\sin(x^2)}{1 + \tan x} \quad (u) \quad \text{כאשר } x \rightarrow 0 \quad \text{הפונקציה רציפה בנקודה הסדרה.}$$

$$\frac{1}{h} \rightarrow 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow 1 \quad (v)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

הוכחה

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \frac{\tan x}{2} > \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} > x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad x \neq 0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0 \text{ סדרה})$$

$$f(x) \rightarrow L$$

$$x \rightarrow x_0^+$$

הפונקציה נקראת "משקטית",

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ של } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ של } \delta > 0 \text{ ו- } \varepsilon > 0 \text{ כל } GP$$

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{סדרה } GP$$

$$f(x) \rightarrow L$$

$$x \rightarrow x_0^-$$

הפונקציה נקראת "משקטית",

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ של } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ של } \delta > 0 \text{ ו- } \varepsilon > 0 \text{ כל } GP$$

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{סדרה } GP$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

הוכחה

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \text{ של } GP$$

אנחנו: אם  $f$  מוגדרת בסביבת הנקודה  $x_0$ ,  $L$  אז  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ,

$$\bullet \quad f(x) \rightarrow L \text{ אם } f(x) \rightarrow L \text{ או } f(x) \rightarrow L \text{ כל } f(x) \rightarrow L \text{ כל } x \rightarrow x_0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad f(x) \rightarrow L \text{ נכוח } f(x) \rightarrow L \text{ כל } x \rightarrow x_0$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ כל } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ אם } \delta > 0 \text{ יש } \varepsilon > 0$$

$$\bullet \quad |f(x) - L| < \varepsilon \text{ כל } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ אם } \delta > 0$$

$$(\Rightarrow) \quad f(x) \rightarrow L, \quad f(x) \rightarrow L \text{ אם } f(x) \rightarrow L \text{ כל } x \rightarrow x_0$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ אם } \delta > 0 \text{ יש } \varepsilon > 0$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \delta_2 < x < x_0 - \delta_1 \text{ אם } \delta_2 > 0$$

$$x \in \mathcal{N}_f^+(x_0) \text{ כל } \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \text{ אם ניקח } \delta > 0 \text{ יש } \varepsilon > 0$$

המשפט: פונקציה  $f$  נקראת רציפה בנקודה  $x_0$  אם

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ אם } x_0 \text{ נקודה שגוף } f \text{ בנקודה } x_0$$

המשפט:  $f$  רציפה ב- $x_0$  אם  $f$  רציפה שגוף  $f$  ב- $x_0$ .

המשפט:  $f$  רציפה בקטע  $(a, b)$  אם  $f$  רציפה בכל נקודה  $x \in (a, b)$ .

$f$  רציפה בקטע  $[a, b]$  אם  $f$  רציפה ב- $(a, b)$ , רציפה

ב- $a$  וב- $b$  ורציפה שגוף  $f$  ב- $a$ .

אנחנו:  $f(x) \rightarrow L$  אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  כל  $x_n \rightarrow x_0$  כל  $x_n > x_0$  כל  $n$

$$\bullet \quad f(x_n) \rightarrow L \text{ אם } x_n \rightarrow x_0$$

המשפט: אי-המשפט, סגור, רציפה, רציפה.

המשפט: אם  $x_0$  היא נקודה פנימית של  $D_f$ , אז

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ אם } f \text{ רציפה ב-} x_0 \text{ כל } x_0 \in D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0) \text{ אם } f \text{ אי-רציפה ב-} x_0$$

$x_0$  נקראת נקודה נגזרת - נגזרת של  $f$  אם קיים

$$L_1 \neq L_2 \quad \text{אם} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{הבדלה}$$

$x_0$  נקראת נקודה נגזרת - נגזרת של  $f$  אם קיים (אנדרגראד - עקומה)

אם לפחות אחד מהבדלים - נגזרת של  $f$  קיים.

אם קיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  אז קיים נגזרת של  $x_0$  שזה הפונקציה

חומר.

המשפט: נאמר  $\epsilon > 0$  אם  $f(x) \rightarrow \infty$  אז  $\exists M > 0$  כך שכל  $x$  ש- $f(x) > M$  אז  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

אם  $f(x) \rightarrow \infty$  אז  $\exists M > 0$  כך שכל  $x$  ש- $f(x) > M$  אז  $x_0 < x < x_0 + \delta$ .

אם  $f(x) \rightarrow L$  אז  $\exists \epsilon > 0$  ו- $M > 0$  כך שכל  $x > M$  אז  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

אם  $f(x) \rightarrow \infty$  אז  $\exists M > 0$  ו- $N < 0$  כך שכל  $x < N$  אז  $f(x) > M$ .

למשל:  $f(x) \rightarrow L$  ,  $x_n \rightarrow \infty$  אז  $f(x_n) \rightarrow L$

$$f(x_n) \rightarrow L, \quad x_n \rightarrow \infty \quad \text{אם} \quad f(x) \rightarrow L \quad x \rightarrow \infty$$

$$f(x_n) \rightarrow -\infty, \quad x_n \rightarrow x_0 \quad \text{אם} \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow x_0^-$$