

נניח: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ו- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת:

$BP(n)$ הוא הנניח x_n הוא בעל חלק $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(ב) $x_n \rightarrow L$

אם L בעל חלק $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

הוכחה: נניח x_n הוא בעל חלק $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

BP סדרה נכונה של חלקי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ בקצה $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

מכיון ש- $x_n \rightarrow L$, קיים N כך ש- $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

x_N הוא בעל חלק $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לפי $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת.

$a_{n_k} \rightarrow x_N$ קיים K כך ש- $|x_{n_k} - x_N| < \frac{\varepsilon}{2}$ $n_k > K$.

לפי BP $n_k > K$ $|a_{n_k} - L| = |a_{n_k} - x_N + x_N - L| \leq |a_{n_k} - x_N| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

נניח: סדרה חסומה מתכנסת אל L בעל חלק יחיד.

הוכחה: נניח $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ L בעל חלק סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L לפי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ בעל חלק יחיד.

$\Rightarrow$ נניח $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, L בעל חלק יחיד L .

נניח ש- $a_n \not\rightarrow L$.

קיים ש- $a_n \not\rightarrow L$. אז קיים סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $|a_{n_k} - L| \geq \varepsilon$.

לכן יש סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $|a_{n_k} - L| \geq \varepsilon$.

הסדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ חסומה, לפי ε נכנס B_ε בעל חלק סדרה מתכנסת.

$a_{n_k} \rightarrow L$ מכיון ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ בעל חלק יחיד L .

אבל $|a_{n_k} - L| \geq \varepsilon$ לפי ε .

הסקנה: אם סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אל L אז סדרה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת אל L .

הוכחה: $x_n \rightarrow L$, אז $x_{n_k} \rightarrow L$.

הוכחה: לפי $x_n \rightarrow L$ יש בעל חלק יחיד L .

לכן, קיי חסומה חלקים $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $\{L\}$ לפי L הוא בעל חלק.

חלקי היחיד $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ לפי $x_n \rightarrow L$.

השפעה: נאמר שסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את חצי קריי (Cauchy)

אם לכל $\varepsilon > 0$ יש N כזה כי לכל $n, m > N$ אפסים $|x_n - x_m| < \varepsilon$

סדרה המקיימת את חצי קריי נקראת סדרה קריי.

משפט: (קרייטון קריי להבטת סדרה)

סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מתכנסת ואפס היא סדרה קריי.

פוכתם: ($\Leftarrow$) נניח שהסדרה מתכנסת, ויהי $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

כל $\varepsilon > 0$, ע"פ הבטת הסדרה, קיים N כך ש: $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N$

$$n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| = |x_n - L + L - x_m| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \varepsilon$$

($\Rightarrow$) נניח ש $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה קריי.

נקח $\varepsilon = 1$, קיים N כך לכל $n, m > N$, $|x_n - x_m| < 1$.

$$\forall n > N, |x_n - x_{n+1}| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1}| < 1 + |x_{n+1}|$$

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$$

כלומר הסדרה $\{x_n\}$ חסומה.

ע"פ משפט בלזגון-וירטסטרס, יש מת סדרה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת,

נסמן $L = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. נוכיח ש- $x_n \rightarrow L$.

יהי $\varepsilon > 0$. קיים K כך לכל $k > K$, $|x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ע"פ חצי קריי, קיים N כך לכל $n, m > N$, $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

נבחר $N = \max(N_1, K)$. כל $n > N$, $k > K$, $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

אם נקיים $n > N$, נבחר $k = N+1$.

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{כל } n > N \text{ מקיים:}$$

$$\Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

המשפט.