תרגילים בטופולוגיה - גליון מס' 2

1) יהי $X_\alpha:=[0,1]$ עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ ונסמן $X:=\prod_{\alpha\in\mathbb{R}} X_\alpha=[0,1]^{\mathbb{R}}$

הוכח כי ב-X ק"מ קבוצה צפופה בת מניה. רמז: הסתכל בפונקציות בעלות מס' סופי של ערכים.

2) תהי $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מרחבים מטריים. עבור $x,y\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}$, מגדירים

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}.$$

הוכח כי (X,d) מרחב מטרי. הטופולוגיה המושרית ע"י d היא טופולוגית המכפלה (כאשר הטופולוגיה של X_n היא זו המושרית ע"י d_n).

3) תהי $\mathcal{B}$ משפחת הקטעים $(a,b]$ ב-$\mathbb{R}$ ו-τ טופולוגיה, שה-$\mathcal{B}$ מהווה לה בסיס. נסמן $\mathbb{R}_u:=(\mathbb{R},\tau)$. הוכח כי τ יותר עדינה מהטופולוגיה האוקלידית אך לא שווה לה. הוכח כי $\mathbb{R}_u\times\mathbb{R}_u$ הוא מרחב ספרבילי אבל $A=\{(x,y):x+y=1\}$ בתור תת מרחב של $\mathbb{R}_u\times\mathbb{R}_u$ הוא לא ספרבילי.

4) יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, $X=A_1\cup A_2$, $f_1:A_1\to Y$, $f_2:A_2\to Y$ פונקציות רציפות. הוכח [illegible] $f_2|_{A_1\cap A_2}=f_1|_{A_1\cap A_2}$.

ג) אם A_1, A_2 סגורות או שתיהן פתוחות אז $f: X \to Y$ המוגדרת ע"י

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1, \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

רציפה.

5) נגדיר יחס שקילות R במרחב טופולוגי Y: xRy אם כל תת קבוצה פתוחה וסגורה המכילה את x מכילה גם את y. (להוכיח.) יהי Z מרחב המנה Y/R ויהי $z \in Z$. הוכח כי חיתוך כל תתי הקבוצות הפתוחות והסגורות ב-Z המכילות את z הוא $\{z\}$.