תרגול

X- קבוצה $\tau \subset P(X)$

$\emptyset \in \tau$ $X \in \tau$

τ סגורה על איחודים

$\{U_\alpha\} \subset \tau \Rightarrow \bigcup U_\alpha \in \tau$

τ סגורה על חיתוכים סופיים

$\mathbb{R}$ $\tau =$ קבוצות פתוחות "רגילות" ב- $\mathbb{R}$

X $\tau = P(X)$

$\mathbb{R}$ $\tau = \{A \underset{\emptyset}{\underset{\cup}{\subset}} \mathbb{R} \mid \#(\mathbb{R}-A) < \infty\}$

$\mathbb{R}$ $\tau = \{\{x>a\} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$\bigcup \{x > a_\alpha\} = x > \inf a_\alpha$

$\bigcap \{x > a_i\} = \{x > \max a_i\}$

$\bigcap \{x > 1-\frac{1}{n}\} = [1, \infty)$

לא טופולוגיה

$X = \mathbb{R}$

$\tau = \{$ תתי קבוצות בנות מנ"ה ב- $\mathbb{R}$ $\}$

$\tau = \{$ תתי קבוצות לא בנות מנ"ה $\}$

<u>בסיס</u>- $B \subset \tau$ נקראת בסיס אם כל איבר של τ הוא איחוד של איברי B או באופן שקול:

לכל $x \in U \in \tau$ קיימת $b \in B$ כך ש:

$x \in b \subset U$

$\forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x) \subset U$

תת- בסיס

$\Sigma \subset \tau$ נקראת תת-בסיס של τ אם $\tau = \tau(\Sigma)$

$$= \tau = \left\{ \begin{array}{c} \text{איחודים כלשהם} \\ \text{של חיתוכים סופיים} \\ \text{מ-}\Sigma \end{array} \right\}$$

בסיס לטופולוגיית משלימים סופיים

B_n - קבוצות עם משלים בגודל n מס' לפחות.

$$B_3 \subset B_2 \subset B_1$$

תת- בסיס:

קבוצות עם משלים בגודל 1 $\quad \mathbb{R} \setminus \{a\}$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ ע"י $\{\{x>a\}, \{x \le b\}\}$

בסיס של זה $(a,b]$

להראות שזו טופולוגיה עדינה מהטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cc} B_2 & B_1 \\ \cap & \cap \\ \tau_2 & \tau_1 \end{array}$$

$$B_1 \subset \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \subset \tau_2$$

$$(a,b) = \bigcup_{a<c<b} (a,c]$$

קבוצות סגורות

(X,τ) מרחב מטרי $A \subset X$ נקראת סגורה אם $X \setminus A \in \tau$

חיתוך של סגורות - סגורה

איחוד סופי של סגורות - סגור. $\quad \bigcap X - U_\alpha = X - \bigcup U_\alpha$

לא פתוחה $\neq$ סגורה

<u>הגדרה:</u> $\bar{A}$ - הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את A

תרגיל: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

למצוא את $\bar{A}$

1) בטופולוגיה הרגילה

2) בטופולוגיית המשלימים הסופיים

$\bar{A} \setminus A = \partial A \ni x \Leftarrow$ כל סביבה של $x \notin A$ מכילה נקודה מ-A

<u>סביבה ב-$\mathbb{R}$ אז:</u> $x \in U \subset X$ כך שקיימת $V \in \tau$ ו- $x \in V \subset U$

1) $x \neq 0$ אז הוא לא ב-$\bar{A}$

0 כן נמצא ב-$\bar{A}$ אז $\bar{A} = A \cup \{0\}$

2) $\bar{A} = \mathbb{R}$ כל המרחב

6/11/08

קבוצה X, $\emptyset \neq \Sigma \subset \mathcal{B}(X) \ni \sigma$

Σ היא תת-בסיס של $\sigma(\Sigma)$

משפט: תהי $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{B}(X)$

התנאים הבאים שקולים:

א) $\mathcal{B}$ בסיס של $\sigma(\mathcal{B})$

ב) ל-$\mathcal{B}$ התכונות הבאות:

- $X = \{B : B \in \mathcal{B}\}$

- לכל $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ולכל $x \in B_1 \cap B_2$ קיימת $U \in \mathcal{B}$

המקיימת $x \in U \subset B_1 \cap B_2$

א $\Leftarrow$ ב טריוויאלי

ב $\Leftarrow$ א מספיק להוכיח סגירות של קב' מ-B הוא איחוד של קבוצות מ-$\mathcal{B}$

$B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$

צ"ל $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ איחוד של קבוצות מ-B

$\bigcap_{i}^{n-1} B_i = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$

$\forall C_\alpha \in B$

אינדוקציה

$n=1$

$n=2$ להשתמש בתכונה 2

תהי נניח הטענה נכונה עבור $n-1$

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) \cap B_n = \underbrace{\left(\bigcup_\alpha (C_\alpha \cap B_n)\right)}_{\text{איחוד קבוצות מ-} B}$$

X מרחב טופולוגי, $x \in X$, תת-קבוצה N של X

נקראת סביבה של x אם קיימת קבוצה פתוחה G המקיימת

$x \in G \subset N$

$(0,1]$ סביבה של $\frac{1}{2}$

אינה סביבה של 1

$F \subset X$. F נקראת סגורה אם $X \setminus F$ קבוצה פתוחה.

$X, \emptyset$ קב' סגורות

חיתוך של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

$A \subset X$. נקודה $x \in X$ נקראת נק' סגור של A אם כל סביבה של x מכילה נקודה של A.

$\bar{A}$ - אוסף כל נקודות הסגור של A - הסגור של A

לכל A: $A \subseteq \bar{A}$

לכל A - $\bar{A}$ היא קבוצה סגורה.

$A \subset X$ סגורה $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

$A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

לכל $A \subset X$: $\bar{A} = \cap \{F \subset X : \underset{F \supset A}{F \text{ סגורה}}\}$

X טריוויאלי. $x \in X$ $\{x\}$

$X = \overline{\{x\}}$

ל- $y \in X$
רק סביבה
$X =$ זאת

$X \cap \{x\} \neq \emptyset$

$y \in \overline{\{x\}}$

$\overline{(0,1)} = [0,1]$

$\bar{Q} = R$

רציונליים Q

R ממשיים

$A \subset X$ נק' $x \in X$ נקראת נק' הצטברות של A אם כל סביבה של x מכילה נק' של A השונה מ-x.

A' - אוסף כל נקודות ההצטברות של A.

$\bar{A} = A \cup A'$

$A \subset X$. הפנים של A $\quad \operatorname{int} A$

הוא איחוד של תתי הקבוצות הפתוחות המוכלות ב־ A

$\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$

$A \subset X$ פתוחה $\Leftrightarrow$ $A = \operatorname{int} A$

$$\operatorname{int} A = X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right)$$

$A \subset X$ השפה של A, $\operatorname{Bd}(A)$

היא $\bar{A} \cap \left(\overline{X \setminus A}\right)$

שווה ל־ $\bar{A} \setminus \operatorname{int} A$

$$\operatorname{Bd} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$A \subset X$ נקראת צפופה ב־ X אם $\bar{A} = X$

$\Leftrightarrow$ כל קבוצה פתוחה מכילה נקודה מ־ A

(X,τ) מרחב טופולוגי $-$ $Y \subset X$

$$\tau_Y := \{G \cap Y \,;\, G \in \tau\}$$

משפחה זו היא טופולוגיה על Y

(הטופולוגיה המושרית על Y ע"י τ).