

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>קונבולוציה</b><br><p>אם <math>X</math> ו-<math>Y</math> ב"ת עם צפיפויות <math>f_X</math> ו-<math>f_Y</math>, אזי</p> $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(s) \cdot f_Y(z-s) ds$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
| <b>טרנספורמציות</b><br><p>77-מימד:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
| $Y = g(X)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| $f_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_X(x) \cdot \frac{1}{ g'(x) }$<br><p>(מבטאים את כל נגזרות המסור של <math>u</math>. (מבטאים את <math>x</math> כביטוי של <math>u</math>)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{ g'(g^{-1}(y)) }$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
| <b>תוחלת של טרנספורמציה</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  |
| $Y = g(X)$<br>$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g(X) \cdot f_X(x) dx$<br><p>עובד גם במקרה של שני משתנים:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
| $Z = \varphi(X, Y)$<br>$E(Z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(X, Y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx \cdot dy$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |  |
| <b>פונקצית יוצרת מומנטים</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n) = E(e^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot e^{tx} dx$<br>$E(X^n) = \left. \frac{d^n}{dt^n} (M_X(t)) \right _{t=0}$<br><p>אם <math>X</math> ו-<math>Y</math> מ"מ בעלי תומך חסום (מקרה פרטי: חסומים), ומתקיים <math>X \sim Y</math> אזי <math>E(X^n) = E(Y^n)</math> לכל <math>n</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |
| <p>פונקציה יוצרת מומנטים של סכום של משתנים מקריים ב"ת, היא מכפלת הפונקציות יוצרות מומנטים שלהם.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |  |
| <b>סדרות של מאורעות</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\limsup A_n = \{A_n \text{ i.o.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m</math></li> <li><math>\liminf A_n = \{A_n \text{ eventually}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m</math></li> <li><math>P(\limsup A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)</math></li> <li><math>P(\liminf A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right)</math></li> <li><math>\liminf A_n \subseteq \limsup A_n</math></li> <li><math>P(\limsup A_n) = 1 - P(\liminf A_n^c)</math></li> <li><math>\{A_n \text{ i.o.}\}^c = \{A_n^c \text{ eventually}\}, \{A_n \text{ eventually}\}^c = \{A_n^c \text{ i.o.}\}</math></li> <li><math>\lim P(A_n) = P(\lim A_n)</math></li> </ul> |  |
| <b>אי שוויונות מרקוב וצ'ביצ'ב</b><br><p>(דורש ש-<math>X</math> יהיה מרקוב: <math>P(X &gt; a) \leq \frac{1}{a} E(X)</math> לכל <math>a &gt; 0</math>. אי-שליילי כמעט תמיד צ'ביצ'ב: <math>P( X - E(X)  &gt; a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}</math> לכל <math>a &gt; 0</math>. צ'ביצ'ב החד-צדדי: <math>P(X - E(X)) \leq \frac{Var(X)}{Var(X) + a^2}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
| <p><u>קולטמורוב:</u> תהי <math>X_1, \dots, X_n</math> סדרה סופית של מ"מ ב"ת <math>V(X_1) &lt; \infty, \mu = 0</math> נגדיר <math>S_k = X_1 + \dots + X_k</math> אזי <math>P(\max_{1 \leq k \leq n}  S_k  \geq \varepsilon) \leq \frac{var(S_n)}{\varepsilon^2}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>אי-שוויון ינסן: <math>g(E(X)) \leq E(g(X))</math> עבור מ"מ <math>X</math> אינטגרביילי ו-<math>g</math> קמורה. בהוכחת הא"ש משתמשים בישר התומך: <math>g(t) \leq g(t - E(X)) + g(E(X))</math>. אי השוויון נכון בגלל קמירות הפונקציה. לוקחים תוחלת, ומקבלים את אי השוויון.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><b>אי תלות</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>X, Y</math> יחיד בלתי תלויים אם מתקיים: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>A, B \in \mathbf{B}</math> לכל <math>P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)</math></li> <li><math>\Leftrightarrow f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y \Leftrightarrow F_{X,Y} = F_X \cdot F_Y \Leftrightarrow X, Y</math> בלתי תלויים</li> <li><math>\Leftrightarrow F_{X Y}(x) = F_X(x) \cdot f_Y(y) = g(x) \cdot f(y)</math></li> </ul> </li> <li>אם <math>\varphi, \psi</math> פונקציות בורלג ו-<math>X, Y</math> ב"ת אזי <math>\varphi(X), \psi(Y)</math> בלתי תלויים.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
| <p><b>פונקציות הסתברות</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X &gt; x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt</math></li> <li><math>F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(s, t) \cdot ds \cdot dt</math></li> <li><math>f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}</math></li> <li><math>\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1</math></li> </ul> <p>תנאי הכרחי לקיום צפיפות – רציפות של <math>F</math>.</p> <p><math>F</math> תמיד מונוטונית לא יורדת, שואפת לאחד באינסוף ואפס במינוס אינסוף, ציפה מימין. <math>f</math> תמיד אי-שלילית.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| <p><b>פונקציות אחוזון הגדרה:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>F_X(x-) \leq p \leq F_X(x+) = F(x)</math> אם <math>X</math> הוא אחוזון של <math>X</math> אם <math>p \in (0, 1)</math>.</li> <li><math>X^*: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}</math> היא פונקצית אחוזון של <math>X</math> אם לכל <math>p \in (0, 1)</math> <math>X^*(p)</math> הוא <math>p</math>-אחוזון של <math>X</math>.</li> <li><math>E(X^*) = E(X)</math></li> <li><math>F_X</math> עולה ממש (לא בהכרח רציפה) <math>\Leftrightarrow X^*</math> רציפה על <math>(0, 1)</math>.</li> <li><math>F_X</math> רציפה <math>\Leftrightarrow X^*</math> עולה ממש (לא בהכרח רציפה)</li> <li><math>X^*(p-) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x+) \Leftrightarrow X^*(p) \leq x \Leftrightarrow F_X(x-) \leq p</math></li> </ul> <p>לא פורמלית, פונקצית האחוזון <math>X^*</math> היא הפונקציה ההפוכה ל-<math>F_X</math>. פרט לנקודות הקפיצה של <math>F_X</math>. בנקודות הקפיצה ערך <math>X^*</math> הוא ערך האטום.</p> |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>תומך: <math>\text{SUPP}(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon &gt; 0. P(x - \varepsilon &lt; X &lt; x + \varepsilon) &gt; 0\}</math><br/> <math>= \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon &gt; 0. F_X(x + \varepsilon) - F_X(x - \varepsilon) &gt; 0\}</math></li> <li>זו הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמתקבלת בהסתברות 1</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |
| <p><b>צפיפות משותפת</b></p> <p>אם <math>X</math> ו-<math>Y</math> ב"ת, אז <math>f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)</math></p> <p><math>f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy</math></p> <p>אם <math>(X, Y)</math> בעל צפיפות משותפת <math>f_{(X,Y)}</math> אם <math>f_{(X,Y)}</math> ניתנת לפירוק</p> <p><math>f_{(X,Y)}(x, y) = g(x) \cdot h(y)</math> כש <math>g</math> ו-<math>h</math> בורלג, אזי <math>X</math> ו-<math>Y</math> ב"ת.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |  |
| <p><b>התפלגות מותנה</b></p> $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $f_{(X,Y)}(x, y) = f_{Y X=x}(y) \cdot f_X(x) = f_{X Y=y}(x) \cdot f_Y(y)$ $f_{X Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) \cdot f_{Y X=x}(y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx}$ <p>כשמשתנה אחד בויד, מחליפים את <math>f</math> ב-<math>P</math>.</p> $F_{X Y=y}(x) = P(X \leq x   Y = y) = \int_{-\infty}^x f_{X Y=y}(t) dt$ $E(X   Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X Y=y}(x) dx$ $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X   Y = y) f_Y(y) dy$ $P(A) = E(P(A   X)) = E(I_A) = E(E(I_A   X))$ $f_{X,Y} = E(f_{X,Y Z})$ <p>עבור ממש בידד: <math>E(g(X) Y) = \sum g(x)P(X=x Y)</math></p> $P(X \leq t, Y \leq s) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f_X(x) * f_{Y X=x}(y) dy dx =$ $= \int_{-\infty}^t f_X(x) * P(Y \leq s   X = x) dx$                                                                                                                                                                     |  |

|                                                                                                                        |                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Uniform distribution:</b>                                                                                           |                                                                                                                                                          |
| <u>Notation:</u>                                                                                                       | $X \sim U(a, b)$                                                                                                                                         |
| <u>pdf:</u>                                                                                                            | $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{ for } a < x < b.$                                                                                                         |
| <u>cdf:</u>                                                                                                            | $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot I_{[a,b]}(x) + I_{(b,\infty)}(x).$                                                                         |
| <u>Expectation:</u>                                                                                                    | $E(X) = \frac{a+b}{2}$                                                                                                                                   |
| <u>Variance:</u>                                                                                                       | $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$                                                                                                                            |
| <u>Moment Function:</u>                                                                                                | $MGF(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$                                                                                                                |
| <b>Normal distribution:</b>                                                                                            |                                                                                                                                                          |
| <u>Notation:</u>                                                                                                       | $X \sim N(\mu, \sigma^2)$                                                                                                                                |
| <u>pdf:</u>                                                                                                            | $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$                                                        |
| <u>Expectation:</u>                                                                                                    | $E(X) = \mu$                                                                                                                                             |
| <u>Variance:</u>                                                                                                       | $Var(X) = \sigma^2.$                                                                                                                                     |
| <u>Sum:</u>                                                                                                            | If $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ are independent then<br>$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$ |
| <u>Moment Function:</u>                                                                                                | $MGF(t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$                                                                                                          |
| <b>Exponential distribution:</b>                                                                                       |                                                                                                                                                          |
| <u>Notation:</u>                                                                                                       | $X \sim \exp(\lambda)$                                                                                                                                   |
| <u>pdf:</u>                                                                                                            | $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)$                                                                                                |
| <u>cdf:</u>                                                                                                            | $F_X(x) = P(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot I_{(0,\infty)}(x)$                                                                                    |
| <u>Expectation:</u>                                                                                                    | $E(X) = \frac{1}{\lambda}$                                                                                                                               |
| <u>Variance:</u>                                                                                                       | $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$                                                                                                                           |
| <u>Sum:</u>                                                                                                            | If $X_1, \dots, X_k \sim \exp(\lambda)$ are independent then<br>$\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Gamma}(k, \lambda).$                                        |
| <u>Minimum:</u>                                                                                                        | if $X_1, \dots, X_k \sim \exp(\lambda_i)$ then<br>$\min\{X_1, \dots, X_k\} \sim \exp\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right)$                                 |
| <u>Moment Function:</u>                                                                                                | $FMT(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$                                                                                                                   |
| <b>שינוי</b>                                                                                                           |                                                                                                                                                          |
| $Var(aX) = a^2 Var(X)$                                                                                                 |                                                                                                                                                          |
| $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$                                                                              |                                                                                                                                                          |
| $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$                                                                         |                                                                                                                                                          |
| $Var(X) = E(Var(X Y)) + Var(E(X Y))$                                                                                   |                                                                                                                                                          |
| $Var(X) \leq E((X - c)^2)$ for every $c \in \mathbb{R}.$                                                               |                                                                                                                                                          |
| $Var(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}. P(X = c) = 1$                                                    |                                                                                                                                                          |
| $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$                                                                                         |                                                                                                                                                          |
| $= E((X - E(X))(Y - E(Y)))$                                                                                            |                                                                                                                                                          |
| $= Cov(X, E(Y X))$                                                                                                     |                                                                                                                                                          |
| $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho \leq 1$                                    |                                                                                                                                                          |
| <b>יחית</b>                                                                                                            |                                                                                                                                                          |
| $E(aX) = aE(X), \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y)$                                                                            |                                                                                                                                                          |
| $E(X) = E(E(X Y)), \quad E(XY X) = X \cdot E(Y X)$                                                                     |                                                                                                                                                          |
| $E(X) = -\int_{-\infty}^0 F_X(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx$                                                 |                                                                                                                                                          |
| $= \int_0^1 X^*(p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$                                                     |                                                                                                                                                          |
| $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \forall n, E( X_1 ) < \infty$ וגם $"n" \leq "n" \leq "n" X_1, X_2, \dots$    |                                                                                                                                                          |
| $E( X_1 ) < \infty \Rightarrow P\left(\limsup \frac{X_n}{n} = +\infty\right) = 1$ , $"n" \leq "n" \leq "n" X_1, \dots$ |                                                                                                                                                          |
| $E( X ) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P( X  > n) < \infty$                                              |                                                                                                                                                          |

### הלמה של בורל-קנטלי

יהיו  $A_1, A_2, \dots$  סדרת מאורעות. אזי

• אם  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$  אזי  $\limsup A_n = \emptyset$ .

• אם  $A_1, A_2, \dots$  גב"ת, אזי  $P(\limsup A_n) = \begin{cases} 0 & \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \\ 1 & \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \end{cases}$

### הלמה של קונקר:

תהי סדרת מספרים, ו  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרת מספרים מונוטונית

עולה לאינסוף. אזי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$  אזי  $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{b_n} \leftarrow 0$ .

### התכנסויות

יהיו  $X, X_1, X_2, \dots$  מ"מ.

1. התכנסות כמעט תמיד  $(X_n \xrightarrow{a.s.} X)$ :  $P(\{\omega | X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$
2. התכנסות בהסתברות  $(X_n \xrightarrow{p} X)$ :  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
3. התכנסות בממוצע:  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|) = 0$
4. התכנסות בממוצע ריבועי:  $\lim_{n \rightarrow \infty} E((X_n - X)^2) = 0$

כדי להראות (ברוב המקרים)  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ :

מגדירים:  $A_n = \{|X_n - X| < \varepsilon\}$ , וטראים ש  $P(\{A_n \text{ eventually}\}) = 1$ .

וזה מתקיים  $\Leftrightarrow P(\{A_n^c \text{ i.o.}\}) = 0$ . ואת זה אפשר לבדוק עם הלמה של בורל-קנטלי. מתקיים ש-  $A_n^c = \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$  ובודקים האם  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) < \infty$ .

כדי להראות  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$  מספיק להראות כי  $P(\{A_n \text{ eventually}\}) = 0 \Leftrightarrow P(\{A_n^c \text{ i.o.}\}) = 1$  ואת זה מקבלים מבורל-קנטלי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = \infty$  אבל פה נדרוש גם ש-  $A_1^c, A_2^c, \dots$  יהיו ב"ת.

### החוק החלש של המספרים הגדולים (WLLN)

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת סופית, ונסמן  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , אזי

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E(X_1)$$

### החוק החזק של המספרים הגדולים (SLLN)

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת סופית, ונסמן  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , אזי

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} E(X_1)$$

•  $F_X$  רציפה. אז  $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$

### משפטי ההתכנסויות המונוטונית והדומיננטית

אלו הם תנאים מספיקים לחילופיות של סדר הגבול והתוחלת. יהיו  $Y, X, X_1, X_2, \dots$  מ"מ.

### משפט ההתכנסות המונוטונית (MCT)

אם  $E(|X_1|) < \infty$  וגם  $P(X_n \nearrow X) = 1$  אזי

$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = E(X) \in (-\infty, \infty]$  (באופן דומה, עבור סדרה מונוטונית יורדת).

### משפט ההתכנסות הדומיננטית (DCT)

אם  $P(X_n \rightarrow X) = 1$  וגם לכל  $n$  מתקיים ש-  $|X_n| \leq Y$ , וגם

$E(|Y|) = E(Y) < \infty$  אזי

$$E(|X|) < \infty, \quad E(|X_n - X|) \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = E(X) \in (-\infty, \infty)$$

### חסנת המגול

עבור סיגמה שדות: אם  $g_1 \subset g_2 \subset F$  אז

$$E(X | g_1) = E(E(X | g_1) | g_2) = E(E(X | g_2) | g_1)$$

עבור מ"מ:

$$E(X | Y) = E(E(X | Y, Z) | Y) = E(E(X | Y) | Y, Z)$$

### משפט שלושת הסורים של קולמורוב

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת ולכל  $c > 0$  נסמן  $X_n^{(c)} = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leq c\}}$ ,

$$S_n^{(c)} = X_1^{(c)} + \dots + X_n^{(c)}$$

משפט:  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת נקבע  $c > 0$  ונתבונן בטורים:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c) < \infty \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^{(c)}) < \infty \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n^{(c)}) < \infty$$

אזי: (1)  $S_n^{(c)}$  מתכנס כמעט תמיד  $\Leftrightarrow$  לכל  $c > 0$  (1) ו (2) קטנים מאינסוף (2) מתכנס.

(2) אם (1) ו (2) ו (3) מתכנסים עבור  $c > 0$  כלשהו  $S_n^{(c)}$  מתכנס כמעט תמיד.

### התכנסות בהתפלגות

הגדרה:

• סדרת פונקציות התפלגות  $\{F_n\}_n$  על  $\mathbb{R}$  מתכנסת חלש לפונקציה ההתפלגות הגבולית  $F$  אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  לכל  $x \in C(F)$  (לכל נקודת רציפות של  $F$ ).

•  $X_n \xrightarrow{D} X$  אם  $F_{X_n} \xrightarrow{weak} F_X$ .

משפט: התכנסות בהסתברות גוררת התכנסות בהתפלגות. ההיפך אינו נכון, אלא אם כן ההתפלגות הגבולית מנוונת בנקודה בודדת

### משפט הגבול המרכזי

יהיו  $X_1, X_2, \dots$  מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ . נסמן

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1) \text{ אזי } S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

כלומר,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

הגבול המרכזי של לר (CLLT - Central Limit Theorem):

$X_1, \dots, X_n$  סדרה סופית של מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת 0 ו-1 MGF קיימת.  $\mathbb{N} \ni i$ :



$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow^D N(0, \sigma^2)$$

$$V(X_1) = \sigma^2$$