

אנליזה נומרית - שיעור 11טזרה נומרית - המשך

רמיון שבו שער, האלגוריתם, ביקור, אילוץ, למתק"פ:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(\eta) + o(h) = f'(a) + \frac{h}{2} f''(\eta)$$

פונקציה בעלת שני ביטוי נומרית בנוסחה זו היא $\frac{h}{2} f''(\eta)$ עבור η כלשהו. נזכר שאנו עוסקים באנליזה נומרית, לכן שרואים עוסקים בתנאים עצומה, ולכן יש לנו שגיאה מקור נוסף:

מכיוון שאנו שוארים את התנאים בהמשך, יש לנו צורך סביב η יש לנו טעות מסוימת. (אזי $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, כולן מסומנות באופן זה יצי 4.8, אז אם נראה בנוסחה שלנו נקרא:

$$\frac{[f(a+h+\epsilon_1) - f(a+\epsilon_2)]}{h(1+\epsilon_3)} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(\eta) + \frac{\epsilon}{h}$$

כאשר ϵ הוא אינדיקטור בעצם נקראת משוואה אנליטית וזהו ~~ה~~ שיהיה נקראת משוואה במילים התנאים. נרצה להביא להנחה אחרת הכוללת (מכאן), אך נשים לב שאת זה כשהי קראנו אחרת ~~ה~~ כשהי זהו. נקרא נקרא η נקרא:

$$e(h) = \frac{h}{2} f''(\eta) + \frac{\epsilon}{h}$$

$$e'(h) = \frac{1}{2} f''(\eta) - \frac{\epsilon}{h^2} = 0$$

$$h = \sqrt{\frac{2\epsilon}{f''(\eta)}} \approx \sqrt{\epsilon}$$

נשים לב שבאופן מקרי. דמיון (לא באמת מקרי דמיון), אם נחשב מתי שיש הפסד של ϵ נקרא יש עבור $h = \sqrt{\frac{2\epsilon}{f''(\eta)}}$. פונקציה בעלת הכולל הנורמלי כאשר ϵ הוא הפסד של ϵ .

לפי כ 10^{-14} - 10^{-16} ϵ איננו מקורו אחר הנתון. שיהיה מסתבר. כמו ש ϵ (Matlab). אז יש נרצה להקטין את הציור האם אחר, נקרא $h \approx \sqrt{\epsilon} \approx 10^{-7}$ - 10^{-8} , ולכן כן האחר כך שיהיה נכון להשוות.

~~עבודת בית ספר~~
~~עבודת בית ספר~~
~~עבודת בית ספר~~

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) - \frac{1}{6} f^{(3)}(a) h^2$$

ואז נניח ϵ שאלו:

$$\frac{[f(a+h) + \epsilon_1] - [f(a-h) + \epsilon_2]}{2h(1 + \epsilon_3)} = f'(a) - \frac{1}{6} f^{(3)}(a) h^2 + \frac{\epsilon}{h}$$

שם קיבלו שאלה נוספת "מחשבת" (זה גם קורס
 רב-משתתפים...). נקצץ ונראה שזה ~~היה~~ שפטיאל היה מ'י'אל
 כאשר מי השאלה שאל ב"צ. אן הפעם, עס אלו ע, נקט
 שהמקסימום הוא כאשר $\sqrt[3]{\frac{\epsilon}{f^{(3)}(a)}} \approx 10^{-5}$ כולו, נצטק ע'אלת
 נרבה כחם כזי אלו ע'אלו דיוק.

אינטגרציה נומרית

נעזיר אן אוטור האינטגרציה כחם $G(f) = \int_a^b f(x) dx$ נעם
 עם ג-א ו-ב קבועים קצ האוטור שאלו כולו נעם להאדר אוטור
 שונים ע'ק'ע'ים אלו. נעבר שאלטציה היא כולו ע'ק'ע'ים
 כחם ע'ק'ע'ים ע'ק'ע'ים:

$$G(f + \Delta f) = G(f) + G(\Delta f) = \int_a^b f dx + \int_a^b (\Delta f) dx$$

עם אן ח'ור ע'נו שאלו אן כ- f , השאלו אן האינטגרל הוא האינטגרל
 אן השאלו. נחשב אן א, שם, ע'ק'ע'ים אן שאלו כולו, $\frac{|\Delta f|}{|f|}$, כולו
 ח'ורם בין השאלו כולו ע'ק'ע'ים. ע'ק'ע'ים אן שאלו כולו, דיוק אלו,
 זה ח'ור כולו $\frac{|\Delta f|}{|f|}$ אלו זה קיווק אלו דבר...

$$K = \sup_{\| \Delta f \|_\infty = 1} \frac{\| G(\Delta f) \|_\infty}{\| \Delta f \|_\infty} = \frac{\| \int_a^b \Delta f dx \|_\infty}{\| \Delta f \|_\infty} \leq \frac{\| \Delta f \|_\infty}{\| \Delta f \|_\infty} \int_a^b 1 dx = (b-a)$$

זה מה? זה קורס מה? אלו ע'ק'ע'ים אלו ע'ק'ע'ים
 ע'ק'ע'ים אלו ע'ק'ע'ים, אלו ע'ק'ע'ים אלו ע'ק'ע'ים

שאלה 1.1
 בתיבת הברז, ~~היא~~ ^{היא} קודם כל, לא סופרמא? ובכן,
 אפשר "לשער" את ה- f ב- n ציבים. לביטוי את הערך בקודם אפס,
 להקטין את הערך בקודם 2^2 וכו'. מתוך דיון זה ניתן לראות
 גילוי אחרים. את האינטואיציה, לא שיהיה אך אחרים. את הבחירה,
 העיקרית שבה יש צורך במידע.

עכשיו, לא נראה אנשים? מה בעקבותי? ובכן, מאחר שאין לבחור
 את נקודה אחת, נרצה (אין מקומה) ונראה אנשים פשוט
 את אפס. שאלה האלה: מה ה- $"\epsilon"$ הזה? ובכן, זה
 שאלה? ובכן, את מכירים את זה? את אפס אנשים $\int_a^b f(x) dx$
 את אפס יוצא - $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, אז את אפס זה ϵ הוא
 $M(x)$? זה עם שטח? זה $\max_{x \in [a,b]} f(x) = M$. זה אפס האחרון
 והחשוב ביותר, אז אפס הוא $a-b$, לא זה שטח אחר?
 את קודם כל, זה לא. אבל זה צריך לשטח אחר, כי זה
 אפס שהם בין השאר המקור, לא שאלה באינטרס הוא קודם, ואפס
 שאלה קודם אחרים שאלה קודם. אפס, אפס זה הוא אפס
 יציב! (אין $\epsilon \rightarrow 0$ או $\epsilon \rightarrow \infty$).

עכשיו שטח, אפשר סוף סוף לומר שטח קודם אנשים
 (אחרים). ~~הוא~~ ^{הוא} נראה אפס את האפס האחרון
 דיון לראות את אפס f בקודם אחרים (אין שטח).
 בואו נראה לראות מקדמי וקודם j - j קודם $\sum_{j=1}^n f(x_j) \approx I(f)$
 אפס קודם אחרים $a, \dots, b$ מקומה.

השאלה האחרונה היא שטח אפס אנשים (אחרים) f
 ואז שטח אנשים אפס אחרים. אז אפס:

$$f(x) = P_k(x) + e_k = \underbrace{\sum_{j=1}^n f(x_j) L_j(x)}_{\text{אפס}} + \underbrace{f(x_0, \dots, x_n) W_{n+1}(x)}_{\text{אפס}}$$

$$I(f) = I(P_k) + I(e_k) \quad \text{אפס}$$

$$I(P) = \int_a^b \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j(x) dx = \sum_{j=1}^n f(x_j) \underbrace{\int_a^b L_j(x) dx}_{\text{אפס}}$$

אפס נראה כי

אינטגרל הטענה

נניח שיש לנו פונקציה f ופונקציה $W_{k+1}(x)$ כדלהלן:

$$E = I(e_k) = \int_a^b f(x_0, \dots, x_k, x) W_{k+1}(x) dx$$

אם זה לא אומר שיש לנו פונקציה f ופונקציה $W_{k+1}(x)$ שיש לנו:

לפי אינטגרל הטענה אנו יכולים להשתמש בזה:

$$I. \text{ PK } f - W_{k+1}(x) \text{ שם קבוע } S_k$$

הפונקציה $f(x_0, \dots, x_k, x)$ והפונקציה $W_{k+1}(x)$ הם:

$$E = f(x_0, \dots, x_k, \xi) \int_a^b W_{k+1}(x) dx = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\eta) \int_a^b W_{k+1}(x) dx$$

המשוואה הראשונה היא: $f(x_0, \dots, x_k, \xi)$ והפונקציה $W_{k+1}(x)$ היא פונקציה של x ויש לה $k+1$ נקודות זרימה.

$$II. \text{ PK } 0 = \int_a^b W_{k+1}(x) dx \text{ שם } S_k$$

$$f(x_0, \dots, x_k, x) = f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}) + f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x)(x - x_{k+1})$$

הפונקציה $f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x)(x - x_{k+1})$ היא פונקציה של x ויש לה $k+2$ נקודות זרימה.

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b f(x_0, \dots, x_k, x) W_{k+1}(x) dx \\ &= \int_a^b f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}) W_{k+1}(x) dx + \int_a^b f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x)(x - x_{k+1}) W_{k+1}(x) dx \\ &= \underbrace{\int_a^b f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}) W_{k+1}(x) dx}_C + \int_a^b f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x)(x - x_{k+1}) W_{k+1}(x) dx \\ &= C \cdot \underbrace{\int_a^b W_{k+1}(x) dx}_0 + \int_a^b f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x) W_{k+2}(x) dx \end{aligned}$$

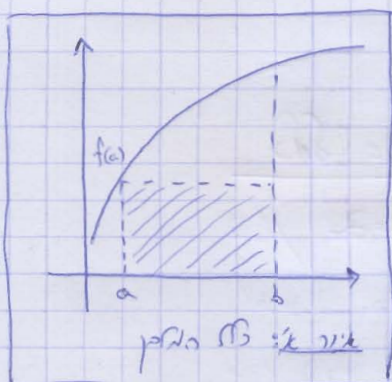
הפונקציה $f(x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x)$ היא פונקציה של x ויש לה $k+2$ נקודות זרימה.

הפונקציה $W_{k+2}(x)$ היא פונקציה של x ויש לה $k+3$ נקודות זרימה.

הפונקציה $W_{k+2}(x)$ היא פונקציה של x ויש לה $k+3$ נקודות זרימה.

$$E = \frac{1}{(k+2)!} f^{(k+2)}(\eta) \int_a^b W_{k+2}(x) dx$$

למה הפיקי הפע' מענין אמרנו בפע' (אם, הוא לא, מציק לאנדר...)
 יש הרבה מציק'ים שבהם $\int_a^b f(x) dx$ משמש. החשוב מביניהם
 הוא כאשר אנחנו עושים אינטרפולציה עם מספר איברי של קוטר
 המסומנת באופן אחיד על כל, כל, כל. כשה קוטר, הפיקה מספר
 ענין "הקפיד" א סדר השאלה כאשר (אם קוד היה (x_0) הוא
 ניה (x^3) וכל. כשה כה, חלק משיטת אלגור' אחר
 משמשת למחירה.



צדקה כל החלק

נקח $k=0$ (נקיט אינטרפולציה אחת) ונקח $x_0=a$.

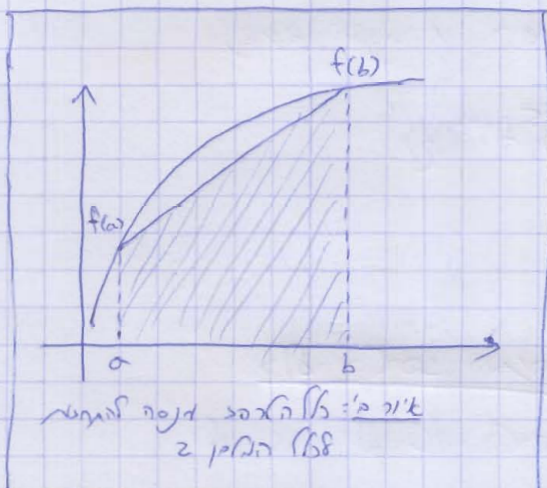
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{e_0}$$

נשו' לב' $W_1 = (x-x_0) = (x-a) \geq 0$ כלומר נא'ז חוק'.

(שמה כשה'ת הראשון ונקב'.

$$E = \frac{f''(\eta)}{1!} \int_a^b (x-a) dx = \frac{f''(\eta)(b-a)^2}{2}$$

כלומר שאלה בסדר אצל $(b-a)^2$ וכל



Midpoint rule - 2

צ"ן $k=1$ (נקיט אינטרפולציה אחת), אך הפעם

$x_0 = \frac{a+b}{2}$. זהו מספר איברי של קוטר אינטרפולציה.

הן מסומנת באופן אחיד (אחר כאלו'צ).

עכ', (מספר של לבדוק ישר'ת): $\int_a^b W_1 dx = 0$

(שמה כשה'ת הפע', ונקח $x_1 = x_0 = \frac{a+b}{2}$

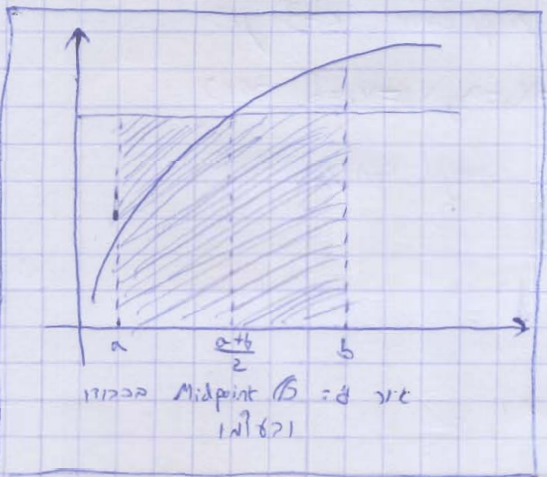
כ' לבדוק ע- W_2 שמה נא'ז חוק' (נא'ז).

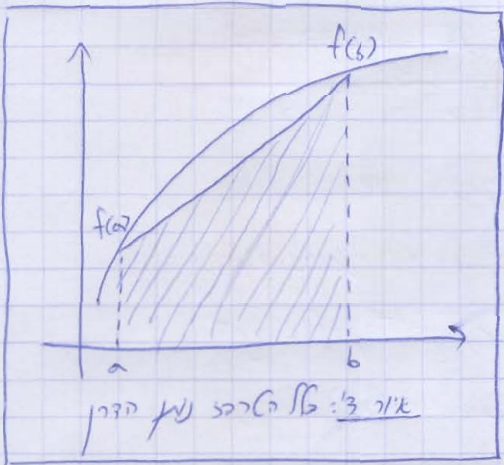
נקב'.

$$E = \frac{f'''(\eta)}{2!} \int_a^b W_2(x) dx = \frac{f'''(\eta)(b-a)^3}{24}$$

כלומר אף בסדר אצל W אשר שמה

הוא קן דומק'ר.

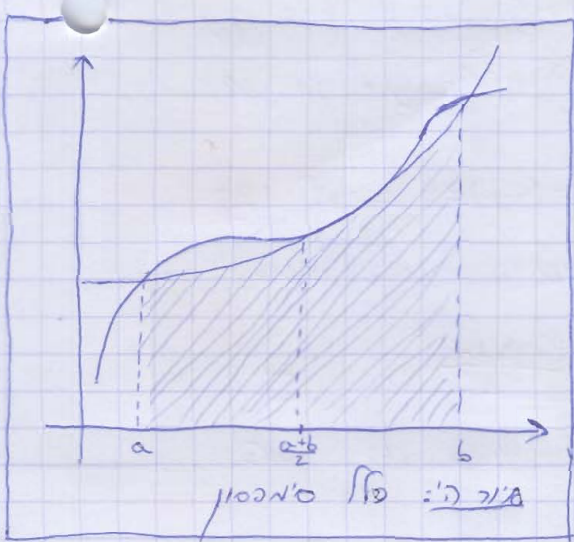




גלגל חרס

הפעם $k=1$ (שני נקודות אינטרפולציה), ונקודות $x_0=a, x_1=b$. נש'ם כי באופן זה, $w_2=(x-a)(x-b) \leq 0$.
 (שם נקודת משיק אברהם נקודה זו):

$$E = \int_a^b f[a, b, x] w_2(x) dx = \frac{f''(\eta)}{2!} \int_a^b w_2(x) dx = -\frac{f''(\eta)}{12} (b-a)^3$$



פול סטנסון

כאן $k=2$ (שלוש נקודות אינטרפולציה) $x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$. שם, נש'ם כי f כו היות אחר k מספר אי-זוגי של נקודות אינטרפולציה, ולכן $\int_a^b w_3(x) dx = 0$, שם (שם נקודת המשיק):

$$E = -\frac{1}{96} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta)$$



איור 5: הוור סטנסון

גלגל חרס מוקדן (Corrected Trapezoid)

שם, זה לא גלגל חרס מוקדן. כאן $k=3$ (ארבע נקודות אינטרפולציה, ואם יש לנו שתי נקודות).
 (אם $x_0=x_1=a, x_2=x_3=b$). שם $w_4=(x-a)^2(x-b)^2 \geq 0$.
 (כש'ם נקודת משיק הריבוע):

$$E = \frac{f^{(4)}(\eta)(b-a)^5}{720}$$

איור 6: גרסיו ריק, כי אין ש'ם אף הקדד המה נראה.

כל החוקה של קום (Composite Rule)

אם $a < b$ נתון, נחלק את $[a, b]$ ל- N קטעים h ו- N נקודות x_j (כאשר $x_0 = a, x_N = b$), נבחר נקודות η_j בקטעים $[x_{j-1}, x_j]$ ונעריך את האינטגרל על ידי סכום ריבועי.

(Composite Rectangle): אם N קטעים

$$h = x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{N}$$

השגיאה של הקטעים E היא:

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f'(\eta_j)}{2} h^2 \leq \frac{1}{2} h f'(\bar{\eta})(b-a)$$

כל החוקה של קום:

$$|E| = \left| \sum_{j=1}^{N-1} -\frac{b^2}{3} f''(\eta_j) \right| \leq |f''(\bar{\eta})| \frac{b-a}{12} h^2$$

פולינומים אורתוגונליים

המכנה

אנחנו מבינים פולינום P_n של n מעלה, a, b ו- $w(x)$ סדרה של פונקציות $w(x)$ (עם קשר $w(x) > 0$). המכנה הפולינום P_n שבו P_n אורתוגונלי:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

אנחנו גם מבינים ציבורים של פולינומים אורתוגונליים P_n שבהם:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^N f(x_j)g(x_j)w(x_j)$$

$$(w=1, a=-1, b=1) \quad \text{(כאשר)}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

למשל:

$$(w=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, a=-1, b=1) \quad \text{(כאשר)}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

אנחנו גם מבינים פולינומים $\{P_j(x)\}$ הם אורתוגונליים P_j :

1. P_j הוא פולינום ממעלה j .

$$\forall j \neq k, \langle P_j, P_k \rangle = 0.2$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

הם המכנה הפולינום

$$P_0=1, P_1=x, P_2=3x^2-1$$

למשל:

גבולות של פולינום האורטוגונלי

1. גבי סדרה אורתוגונלית $\{P_j\}$, $j=0, \dots, k$, ופולינום $Q(x)$ ממשלה קרנן אז שיהיה δ -א. כל $Q(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j P_j(x)$ עבור α_j כלשהם.
אז נקבעים ביחידות.

2. כל Q פולינום ממשלה קרנן (ממש) n -א k -י:
 $\langle P_k, Q \rangle = 0$ וכן $\langle P_k, \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j P_j \rangle = 0$

3. δ - P_k יש k גבס'ים ממש'ים ופס'ים בקטע (a, b) .

מכאן, אכן, כלשהם הקטע נכנס אל הגבולות האלה.