

אנליזה נומרית - גרסא 7

פירוק LU

$$A = L \cdot U$$

למטריצה U למטריצה L

למה צריך את זה בכלל?

$$O(N^3) \quad ? \quad Ax = b$$

אם $A=U$ למטריצה U (או למטריצה) הרי היא

$$O(N^2) - \text{באמצעות הלכה לאחור.}$$

דוגמא: נניח שיש לנו N_5 מטריצה N_5 מטריצה $A_{k,k} = b_k$, $k=1, \dots, N_5$.
 כאשר $N=100$, $N_5=10,000$. כמה יעלה לפתור את המערכת
 בקצרה ישרה? $O(10^4 \cdot (100)^3) = O(10^8)$

פירוק LU על $O(N^3)$ אם נשתמש בפירוק LU
 הריהו כולל יהיה $O(N^3 + N_5 \cdot N^2) = O(100^3 + 10^4 \cdot 100^2)$
 $\uparrow$
 כיוון ראשון
 $= O(10^8)$

מציאת פירוק LU (מפורט)

(א) נניח שיש לנו מטריצה A (Pivoting)

(ב) נבצע ~~לפי~~ A למטריצה L ונניח U מטריצה

$$L \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & 1 \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(ג) נקבל $U = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_{n-1} \cdot A$ נניח L למטריצה

למטריצה L היא L למטריצה L ונניח U למטריצה

למטריצה L היא L למטריצה L ונניח U למטריצה

(ד) למטריצה $L = (L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_{n-1})^{-1}$ ונקבל $A = LU$ כפי שרצונו.

אך לא ממש נניח למטריצה L היא L למטריצה L ונניח U למטריצה
 כפי שרצונו L היא L למטריצה L ונניח U למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

: kwd/3

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & -\frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & \frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & -\frac{38}{85} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -11 \\ 0 & 175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$