

29.3.09

קטגוריית פונקציות

כנסת ופונקציות

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^{(0)}, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

אם $a_1, \dots, a_n$ פונקציה f אפרימורלית אז

$$\lim_{\|\Delta \underline{x}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Delta \underline{x}\|} \left[f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)}) - \sum_{i=1}^n a_i \Delta x_i \right] = 0$$

אם f פונקציה

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \sum_{i=1}^n a_i \Delta x_i + o(\|\Delta \underline{x}\|)$$

אם f פונקציה אפרימורלית אז $\Delta \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta x_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Δx_j Δx_j

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_j^{(0)} + \Delta x_j, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_j} = \lim_{x_j \rightarrow 0} \frac{a_j \Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = a_j$$

אם f פונקציה אפרימורלית אז $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} = \partial_{x_j} f = f'_{x_j}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} = \partial_{x_j} f = f'_{x_j}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{x_3} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

אם f פונקציה אפרימורלית אז

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \langle \nabla f, \Delta \underline{x} \rangle + o(\|\Delta \underline{x}\|)$$

אם $\|\underline{v}\| = 1$ אז $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \langle \nabla f, \underline{v} \rangle$

$$f_{\underline{v}} = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + \underline{v} \Delta t) - f(\underline{x})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f, \underline{v} \rangle \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \langle \nabla f, \underline{v} \rangle$$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$ פונקציה f מ $\mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}^k$
 כל f צריך להיות קיימת J ב $x^{(0)}$ כך ש

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Delta x\|} [f(x) - f(x^{(0)}) - J \Delta x] = 0$$

כל, שווה, באופן מקומי:

$$f(x) = f(x^{(0)}) + J \Delta x + o(\Delta x)$$

J נקראת המטריצה הנגזרת:

$$J = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} & \dots & f_{1x_n} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} & \dots & f_{2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{nx_1} & \dots & \dots & f_{nx_n} \end{pmatrix}$$

Coel: כל f בתכונה הנקראת "מקומית" ב $x^{(0)}$ שבה $f(x) = c$
 צריך להיות קיימת J ב $x^{(0)}$ (ל f ב $x^{(0)}$)

Coel המוקצת הסמוכה

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, נניח כי $f(x^{(0)}) = c$ (נקודת) $x^{(0)}$ ב $\mathbb{R}^n$ שבה $f(x) = c$
 הלא נניח f להיות (מקומית) ב $x^{(0)}$ כל x_m במוקצת c
 $x_1, \dots, x_{n-1}$?

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\|\Delta x\|)$$

$$\Delta x_m \approx \sum_{j=1}^{n-1} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}} \Delta x_j$$

$$\Delta x_m \approx \sum_{j=1}^{n-1} - \frac{f_{x_j}}{f_{x_m}} \Delta x_j$$

הנקודה $x^{(0)}$ כולן $x^{(0)}$ ב $\mathbb{R}^n$ שבה $f(x) = c$ (מקומית) כל x_m במוקצת c

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \langle \nabla f, \Delta x \rangle + o(\|\Delta x\|)$$

נניח f להיות (מקומית) ב $x^{(0)}$

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \langle \nabla f, \Delta x \rangle + \Delta x^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}}_H \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)$$

(ג) תוצאה $x^{(0)}$ ב $\mathbb{R}^n$ שבה $f(x) = c$

המטריצה H הנקראת Hessian
 הנגזרת השנייה של f (כל הנגזרות)
 הלא $\nabla f = \nabla f^T$ הלא ∇f הלא ∇f

שלב ההערכה ההדדית

$$\underline{f}^{(0)} = f(x^{(0)}), \quad \underline{f} = f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

$$(\underline{f} - \underline{f}^{(0)}) = f(x) - f(x^{(0)}) \approx J(x - x^{(0)})$$

לכן

$$\underline{x} = \underline{x}^{(0)} + J^{-1}(\underline{f} - \underline{f}^{(0)}) = \underline{x}^{(0)} + J^{-1} \Delta f$$

מציאת נקודות קריטיות של פונקציה

נבדוק אם נקודת קריטיות של פונקציה $(\nabla f = 0)$ היא נקודת מקסימום או מינימום של הפונקציה.

~~הצורה הכללית של הפונקציה~~

~~$F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$~~

הוא נקודת מקסימום או מינימום של F

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \Leftrightarrow F(x) = 0$ הוא נקודת מקסימום או מינימום של F

(אם x הוא נקודת מקסימום או מינימום של F)

אם נמנה f ציבורי
הוא נקודת מקסימום או מינימום של F
הוא נקודת מקסימום או מינימום של F

$F(x) \approx \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + F'(\alpha) \Delta x = F'(\alpha)(x - \alpha)$ המשוואה

$\alpha \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$ אם x_m הוא נקודת מקסימום או מינימום של f

כאשר $q_m = f'(x_m)$

$\underline{f}(x) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + J(\alpha) \Delta x = J(\alpha)(x - \alpha)$

המשוואה

$\alpha = x - J^{-1}(\alpha) \underline{f}(x) \xrightarrow[\text{נקודת מקסימום או מינימום}]{\text{נקודת מקסימום או מינימום}} x^{(m+1)} = x^{(m)} - J^{-1}(x^{(m)}) \underline{f}(x^{(m)})$

זוהי טבלה של תוצאות. עשוי להיות צורך להוסיף טורים נוספים.
קובעים ונמנה פונקציה חדשה ונחשב אותה...

אברהם עינאר נאמיר

הכנה

נניח $x, y \in \mathbb{R}^m$ (אם $\mathbb{R}^m$). נראה כי פונקציה מהלכה
 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ המקיפה:

$$\|x\| \geq 0 : \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i| \quad (\text{נורמה מנהל}) \quad \text{צורת נורמה פונקציה:}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i|^2} \quad (\text{נורמה האוקלידס})$$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m |x_i|^p}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} |x_j|$$

$$\forall x. \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

מבחן חסימה: מוכח כי

א שיוון שטח

$$|x^T y| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

א שיוון מילר

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

עקרון הנורמה

נניח $\| \cdot \|_I, \| \cdot \|_{II}$ יקראו עקרון של הנורמה $c_1, c_2 > 0$ כך שכל

$$x \text{ מקיים: } c_1 \|x\|_I \leq \|x\|_{II} \leq c_2 \|x\|_I$$

אם $\|x^{(n)}\|_I \rightarrow 0$ אז $\|x^{(n)}\|_{II} \rightarrow 0$ וכל $\|x^{(n)}\|_{II} \rightarrow 0$ אז $\|x^{(n)}\|_I \rightarrow 0$

הערה: לא כל הנורמה שקולה אל מרחב. למשל,

נסתב אל הוקטור $\mathbb{R}^\infty$: $x_j = \frac{1}{j}$, $j \geq 1$. $\underline{x}$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1}{j}\right|^2} < \infty$$

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1}{j}\right| = \infty$$

לכן לא קיימים c_1, c_2 שקיימת שקולה הנורמה.

הערה נוספת: לכל אינדוס סיס הנורמה היא פונקציה רציפה

$$\|\underline{x}\| \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} \|\underline{y}\|$$

משפט: כל הנורמה לכל מרחב אינפיניטימי שקולה.

הוכחה: יהיו שתי נורמות $\|\cdot\|_I, \|\cdot\|_{II}$.

נסתב $B_R = \{\underline{v} \in S \mid \|\underline{v}\|_I = R\}$. נשים לב כי B קבוצה קומפקטית.

$$C_2 = \max_{\underline{v} \in B_1} \|\underline{v}\|_{II} \quad , \quad C_1 = \min_{\underline{v} \in B_1} \|\underline{v}\|_{II}$$

יהי $\underline{u} \in S$, ולמק"מ $\alpha = \|\underline{u}\|_I$

$$\|\underline{u}\|_{II} = \alpha \left\| \frac{\underline{u}}{\alpha} \right\|_{II} = \|\underline{u}\|_I \cdot \left\| \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|_I} \right\|_{II} \leq \|\underline{u}\|_I \cdot C_2$$

$$\|\underline{u}\|_{II} = \|\underline{u}\|_I \cdot \left\| \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|_I} \right\|_{II} \geq \|\underline{u}\|_I \cdot C_1$$

ואכן הנורמות שקולות.

הערה: לפעמים הבאים: כאשר לא מציינים באיזו נורמה מדובר מדובר בנורמה C הישנה

הכוונה היא לנורמה $\|\cdot\|_2$ (או גאומטריית אוקלידס), כפי

שנראה מציינו איזו נורמה בו הוקטורים מדובר. זה $\|\underline{x}\|$.

ואם כהר הכדור עסקינן, אנוני שוכנים עמרים $\underline{x}$ ובמקרים כאלו $\underline{x}$ כעמים

הכוח (כמו כן נמרים $\underline{x}^*$ במקום $\underline{x}$). זה מתן עצות ומוסר איכסור

באבי, ואין לנסות לעצור היסוד בהוספת של $\underline{x}$ לעצמה $\underline{x}$.

