

29.4.09

תרגילי נוסח - גרסאות 6

נרצם להסבר קריאות הסקטור: $\rho(A) = \max_{\lambda_i} \{|\lambda_i|\}$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

קריאות הסקטור:

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i} \{|\lambda_i|\}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

אופן מוכח כי:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

לדוגמה

נמצא את הערכים העצמיים של A : (סעיף 10)

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

על כן נבדוק $\rho(AA^T)$ ונמצא:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 3 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 16 \cdot 4}}{2} = 8, 2$$

$$\rho(AA^T) = \rho(A^T A) = 8$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{8}$$

שאלה: תוכיח כי לכל וקטור הנורמה הליניארית $\|B\| \geq \rho(B)$.

תשובה: יהי v הע"ס המקסימלי של B , $\|v\| = 1$ ה"ע השני.

$$\|Bv\| \geq \|B\| \|v\| = \|B\| \cdot 1 = \|B\|$$

$$\|Bv\| \geq \rho(B) \quad \text{ונקב}$$

שאלה: נניח ש- $S = S^T$ סימטרית. כיצד תהיה הנורמה $\|S\|_{1,2}$?

$$\|S\|_{\infty} = \|S^T\|_{\infty} \quad \text{וכן} \quad \|S\|_{\infty} = \|S\|_1$$

סבור $\| \cdot \|_2$, יש לך כי $S \cdot S^T = S^2$, לכן, S הוא S כי S הוא S

ל S^2 (יש n כושר * ולכן הוא $\in$ ח"ס ל S^2).

הח"ס המקסימלי ל $S^2 = \|S\|^2$ המקסימלי ל S . לכן

$$\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S^T S)} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{(\rho(S))^2} = \rho(S)$$

שאלה: סבור אם המערכת הבאה באמצעות GE (משתנה אחד)

על המערכת שזוהי וזו $\epsilon = 10^{-20}$

המפתח המצוי הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\epsilon \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \epsilon & 1 & 1+\epsilon \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \epsilon & 1 & 1+\epsilon \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\epsilon & 2-\epsilon \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) : \text{מחזור}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

לכן קיבלנו $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבדוק אם אולי המערכת שזוהי

$$\left(\begin{array}{cc|c} \epsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\epsilon & 1-2\epsilon \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Condition # of Linear Algebra Systems

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.005 \\ 0.995 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.015 \\ -0.005 \end{pmatrix} \quad \text{לכן} \quad Ax = b$$

$$\tilde{b}_1 = b + \delta b_1, \quad \delta b_1 = \begin{pmatrix} 0.001 \\ -0.001 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} -0.17 \\ 0.19 \end{pmatrix}$$

נניח שקיבלנו כך

מכאן

לכן נראה שיש קשר הדוק בין κ ו $\kappa(A)$

$$\kappa(A) \approx 20 \approx \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

$$\frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Sb\|}{\|b\|}, A \text{ normen problem: } \underline{\text{siehe}}$$

$$\|Sx\| = \|A^{-1}b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$$

20/05/2020

$$\|b\| = \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

10/5/21

$$\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \leq \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \cdot \frac{\| \delta b \|}{\| b \|}$$

1670

ה'תס"ח ב'ן תש"ט ה'תס"ח תש"ט תש"ט תש"ט

Condition Number $\rightarrow$ ϵ_{rel} ϵ_{abs} $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ ϵ_{rel}