

22.3.09

עקרונות נוספים - חלק 3

כשנרצה לדעת האם הפונקציה p :

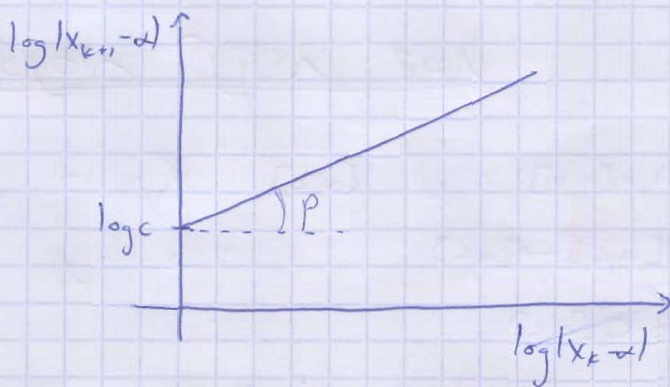
$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \leq C$$

נניח שהיא נכונה:

~~$$|x_{k+1} - \alpha| \approx C |x_k - \alpha|^p$$~~

$$\log |x_{k+1} - \alpha| \approx \log C + p \cdot \log |x_k - \alpha|$$

לכן אם נציג את $\log |x_k - \alpha|$ על ציר ה-x, ו- $\log |x_{k+1} - \alpha|$ על ציר ה-y, נקבל קו ישר:



לכן אם נרצה לדעת האם הפונקציה p :

תוצאה - הפונקציה הפסודה p חזקה p כל עוד p קטן מ-1.5.

נוסחה לשימוש - נוסחה למציאת α כפונקציה של x :

$$\alpha = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

עקרונות נוספים - נוסחה למציאת α כפונקציה של x ו- x_{k+1}

x_{k+1}

מבוא אל סדר ההוכחות של NCE הקורס

חזיה - אין סדר הוכחות

1 - Cord

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - Secant

2 - Regula-falsi

2 - NO

דאגה עיקרית: למצוא דרך של צדדים שלוקחים, (אולי) לאט

הוכחות סקולריות

למשל: יהי f על $[a, b]$ ונקודה $x_0 \in [a, b]$, $x_{k+1} = \phi(x_k)$

1. $\phi: [a, b] \rightarrow [a, b]$: נ"ח כ"י

2. $\phi \in C^1[a, b]$

3. $\exists M < 1 \quad |\phi'(x)| < M \quad \forall x \in [a, b]$

אם $\alpha = \phi(\alpha)$ נקרא α נקודה של ϕ

ק. הסדרה $\{x_k\}$ מתכנסת אל α אם $x_0 \in [a, b]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha) \quad \text{ד.}$$

הוכחה

א. מניחים 1, 2 וקצת קווי רסחה נקודה אחת.

~~$\phi(x) = \phi(x)$~~

נציג $F(x) = \phi(x) - x$ אז $F(\alpha) = 0$ ו- $F(b) \leq 0$ ו- $F(a) \geq 0$

אז נמצא את α לפי α או b בין נקודות של F (בראשית).

אחר מציבים ϕ (ולפיכך F) נקודת קצה α $\leq \alpha \leq b$

כך ש $F(\alpha) = 0$ דבר α נקודה של F .

3.4.6
(7) הוכח כי ϕ מתכנס ל- α (ע"פ משפט 3.4.6)
 $\phi(\alpha_1) = \alpha_1, \phi(\alpha_2) = \alpha_2, \alpha_1 < \alpha_2$ ו' $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$

($\xi_k \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$)

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| = |\phi'(\xi)|(\alpha_2 - \alpha_1) < M|\alpha_2 - \alpha_1| \quad \text{S/C}$$

לכיוון $M > 1$, זה כנראה $|\alpha_2 - \alpha_1| = 0$, כלומר $\alpha_1 = \alpha_2$ ו' $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

הוכח כי ϕ מתכנס ל- α

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| = |\phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)| \leq M|x_k - \alpha|$$

$$\leq M^2|x_{k-1} - \alpha| \leq \dots \leq M^{k+1}|x_0 - \alpha| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

לכיוון $M > 1$, זה כנראה $M = 1$, ו' $M = 1$ ו' $\phi'(\alpha) = 1$

הוכח כי x_k מתכנס ל- α

(ק) באמצעות משפט זה, הוכח כי ϕ מתכנס ל- α (ע"פ משפט 3.4.6)

הוכח כי ϕ מתכנס ל- α (ע"פ משפט 3.4.6)

$$|x_{k+1} - \alpha| < \epsilon \quad \text{ע"פ משפט 3.4.6}$$

$$M^{k+1}(b-a) < \epsilon \quad \text{ע"פ משפט 3.4.6}$$

$$M^{k+1} < \frac{\epsilon}{b-a}$$

$$(k+1) \log M < \log \left(\frac{\epsilon}{b-a} \right)$$

$$k+1 > \frac{\log \left(\frac{\epsilon}{b-a} \right)}{\log M}$$

($\xi_k \in [x_k, \alpha]$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi'(\xi_k)(x_k - \alpha)}{x_k - \alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi'(\xi_k) = \phi'(\alpha)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi'(\xi_k) = \phi'(\alpha)$$

הוכח

$$|x_{k+1} - \alpha| > |x_k - \alpha|$$

(ע"פ משפט 3.4.6)

1. $|\phi'(\alpha)| > 1$, כלומר ϕ מתרחק מ- α

כלומר ϕ מתרחק מ- α

$$\begin{array}{llll} \phi^{(j)}(\alpha) = 0 & j=0,1,\dots,p & p \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R} & \phi \in C^{p+1} \\ \phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0 & & p \in \mathbb{Z} & p \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x}{(x_k - x)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} \quad \text{s/c}$$

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| = \left| \underbrace{\phi(\alpha) + \sum_{j=1}^p \frac{\phi^{(j)}(\alpha)}{j!} (x_k - \alpha)^j}_{=0} + \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} (x_k - \alpha)^{p+1} \right| = \phi(\alpha) \left| \right|$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1-\alpha}}{(x_{k-\alpha})^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} \quad \hookrightarrow \text{سواء هو}$$

תשובה: מה המספר הזה אולי? ואם כבר שטויות ~~הכל~~ תשובה זה
 המספרים הקטנים אולי? הוא נראה כמו עם מעט ^{לכזוב} ~~הכל~~ המספרים
 של משה קיבוץ.

Cordice : kno 13

$$X_{k+1} = X_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(x_k) = \phi_{\text{cord}}(x_k)$$

$$|\phi'_{\text{cond}}| = \left| 1 - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f'(x) \right| < 1$$

$$-1 < \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f''(x) < 1$$

$$0 < \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f'(c) < 2$$

באגד תלמידי שם חתום, פ' אלהי אל ג' אלהי לשם המהממה קולנו הסבר.
כעת נחצו מהי הנחת ~~הנחת~~^{הנחת} ~~הנחת~~^{הנחת}, וזה יהיה סדר
ההבחנה (בהמשך השם) ביטוי הטעני העז).

בצדק β , $\phi'(a) = 1 \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f'(a) \neq 0$, ϕ היא פונקציה חד-חד-ערכית ופונקציה מתמשכת.

דוגמה: $f(x) = x^2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \phi_k(x_k)$$

$$\phi_k(x) = x$$

$$\phi_k'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - 1 = 0$$

(קצת מיותר)

כאשר הנגזרת בתלם x לא נמצאת על הישר $y = f(x)$ שני
בדיוק את הנגזרת הנ"ל

$$\phi''(x) = \left[1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right]' = \left[\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right]' =$$

$$= \frac{(f'f'' + f f''') f'^2 - f f'' 2f'f''}{(f')^4} = \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

הבטנו שיש
ל f גזרת
שנייה $f''(x)$

זה בדיוק כל שא שני לאדם. לכן ההתכנסות היא מסדר שני

מבין שניך נראה שיש 3 מקרים: 1. אם $f'(x) \neq 0$ אז
לא קרה שום דבר, נראה שיש 3 מקרים: 1. אם $f'(x) \neq 0$ אז
יש!

סימנים

הסימנים:
 x_0 הוא הנקודה
שבה $f'(x) \neq 0$
אם $f'(x) = 0$ אז
אם $f'(x) \neq 0$ אז
אם $f'(x) = 0$ אז
אם $f'(x) \neq 0$ אז
אם $f'(x) = 0$ אז
אם $f'(x) \neq 0$ אז
אם $f'(x) = 0$ אז

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \underline{x}^{(0)}$$

$$f(\underline{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ x_2 - x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

הגדרה: פונקציה f מקבלת גבולות $x_1, x_2, \dots, x_n$ בקרבת $x^{(0)}$
קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lim_{\|\Delta \underline{x}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Delta \underline{x}\|} \left[f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)}) - \sum_{j=1}^n \alpha_j \Delta x_j \right] = 0$$

(הגדרה זו שקולה להגדרה של דיפרנציאל)

כדי להוכיח את הטענה הזו, נניח ש-

$$\underline{\Delta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta x_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta x_j \cdot \underline{e}_j$$

$$f(\underline{x}^{(0)} + \underline{\Delta x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \alpha_j \cdot \Delta x_j + o(\|\Delta x_j\|)$$

לכן, נכתוב:

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + \underline{\Delta x}) - f(\underline{x})}{\Delta x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_j^{(0)} + \Delta x_j, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_0^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_j}$$

$$= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\alpha_j \Delta x_j + o(\Delta x_j)}{\Delta x_j} = \alpha_j$$

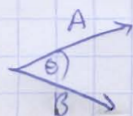
כלומר, $f(x)$ היא פונקציה ליניארית.

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \underbrace{\sum_{j=1}^n f_{x_j}(\underline{x}^{(0)}) \Delta x_j}_{(\nabla f, \underline{\Delta x})} + o(\|\Delta x\|)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

כאשר ∇f הוא וקטור הגרדיאנט.

כעת, נניח ש- f היא פונקציה סקלרית, כלומר $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
אז, הפונקציה f היא סקלרית.



$$(A, B) = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \theta$$

כאשר $\|A\| = 1$ ו- $\|B\| = 1$, נקרא ל- $\cos \theta$ קוסינוס הזווית בין A ל- B .

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + \underline{u} \cdot \Delta t) - f(\underline{x})}{\Delta t}$$

לכן, נכתוב:

$$f_u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + \underline{u} \cdot \Delta t) - f(\underline{x})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\nabla f, \underline{u} \cdot \Delta t)}{\Delta t} + o(\Delta t) = (\nabla f, \underline{u})$$

נתון u הנצטר המקבילי:

$$f_u = (\nabla f, u) = \|\nabla f\| \cdot \|u\| \cdot \cos \theta$$

הערך המקביל $\cos \theta$ הוא 1 כאשר $\theta = 0$, ולכן, הכיוון בו הנצטר המקביל הוא הכיוון הטנגנטיאל.

$$u = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

כמו כן, הנצטר מאנסת כאשר $\theta = 90$. כלומר, במאונך לעברית. לכן הטנגנטיאל אינו מקביל לקווי אופר.

נצטר $\mathbb{R}^k$ ו- $\mathbb{R}^n$ - n ו- k

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix}$$

f זיכרנציקלי $\mathbb{R}^k$

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Delta x\|} [f(x) - f(x_0) - M \Delta x] = 0$$

$$M_{k \times n} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} & \dots & f_{1x_n} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} & \dots & f_{2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{kx_1} & f_{kx_2} & \dots & f_{kx_n} \end{pmatrix} = \text{Jacobian}$$

מש $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ כוונציק $\mathbb{R}^k$ בו נצטר f (אם אפשר!) f_x זיכרנציקלי $\mathbb{R}^k$ הוא זיכרנציקלי $\mathbb{R}^k$ (אם אפשר!).

