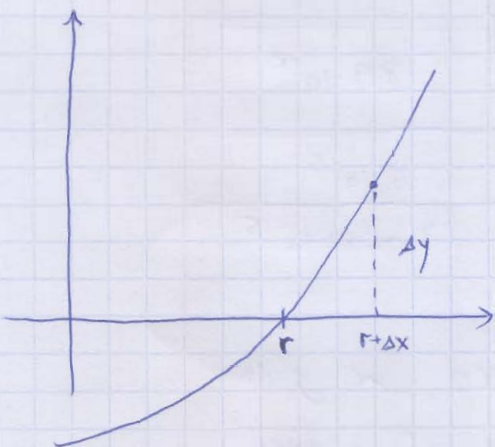


19.3.09

אנליזה נומרית - גרסאות 3



נניח כי $f(x) = 0$ עבור $x = r$.

לכן $f(r) = 0$

$$f'(r) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

↓

$$\Delta x \approx \frac{\Delta y}{f'(r)} = \frac{f(x)}{f'(r)}$$

השימוש בפונקציה זו, כדי להעריך את נקודת האפס של פונקציה, הוא שטח קטן (הערך של Δx הוא בערך $\frac{f(x)}{f'(r)}$). נוסף על זה, הערכה של הנקודה r (הערך של x) באמצעות נוסחה כזו, נקראת למטה.

דוגמה: נניח למשל ש $x^2 - \frac{1}{3} = 0$ (אם $x = 1$, $f(x) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$)

התוצאה: קריטריון הסיום של $\epsilon = 10^{-6}$ (כלומר $|x - r| < \epsilon$). מהי התוצאה?

פתרון: בואו נאמור, אגן הקרח קטן כ-2, למטה הפונקציה:

$$e_0 = \frac{1}{2}, e_1 = \frac{1}{4}, \dots, e_k = 2^{-k+1}$$

$$\boxed{\text{כל שבראשית: } 2^3 = 1000 \approx 1024 = 2^{10}}$$

לכן נבדוק ~~הערך~~ של $2^{-10} \approx 10^{-6}$, כלומר 10^{-6} אחריו.

גרסה 2: בואו נאמור ש $x^2 - \frac{1}{3} = 0$ (אם $x = 1$, $f(x) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$)

3 גרסאות

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

בדיוק מה שנקרא?

$$g(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{6x}$$

נניח $x_0 = 1$ (הערך של x)

הכאה של C^1 נצטרך

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\phi(x_k)}$$

לפי "משפט" P_k הן ϕ ו- f מתנהגות כמו g ו- f על $\mathbb{R}$.

הוכחה: נניח $x_k = r + \delta$ (אנחנו נבחר δ_k קטן מספיק מאוחר יותר)

$$\phi(x) = \frac{f(r+\delta) + f(r+\delta) - f(r+\delta)}{f(r+\delta)}$$

$$= \frac{f(r+\delta) + f(r) + f'(r)\delta - f(r+\delta)}{f(r+\delta)} + o(\delta^2)$$

(משפט C^1)

$$= \frac{\overbrace{f(r+\delta) + f(r) + f'(r)\delta}^{\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon} - f(r+\delta)}{f'(r)\delta}$$

$$= \frac{f'(r)\varepsilon - f'(r)\delta}{f'(r)\delta} = \frac{f'(r)\delta(1 + f'(r) - 1)}{f'(r)\delta}$$

$$\phi(x_k) = f'(r) + o(\delta)$$

אם נסתכל על $o(\delta)$ ו- $o(\delta^2)$ כ- δ זניח, אז $o(\delta^2)$ זניח יותר, כלומר $o(\delta)$ הוא $o(\delta)$ עצמו.

אם נסתכל על ϕ ו- f כ- g ו- f על $\mathbb{R}$, אז

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\phi(x_k)} = r + \delta - \frac{f(r) + \delta f'(r) + o(\delta^2)}{f'(r) + o(\delta)}$$

$$= r + \delta - \delta \frac{f'(r) + o(\delta)}{f'(r) + o(\delta)} = r + \delta - \delta(1 + o(\delta))$$

$$x_{k+1} = r + o(\delta^2)$$

כלומר x_{k+1} קרוב ל- r יותר מ- x_k (כי δ קטן יותר מ- δ^2).

אם δ קטן, אז δ^2 קטן יותר מ- δ .

למשל, קצור הנק' כי $\phi(x_k) = f'(x_k) + o(\delta^2)$. דגן הע'ה

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\phi(x_k)}$$

היא זהה לעד נוסחון זה כי $o(\delta^2)$. דגן, מיון הע'ה
 נוסחון המכסה מסדר ג', על הע'ה כי מוכנס מסדר ג'.

הע'ה: נבחר למקדא הע'ה $f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$. דגן
 נוסחון נבחר $x_0 = 5$. נק'ה כי $x_{k+1} = \frac{x_k + 1}{2}$.
 (בנימא הע'ה נבחר ורע'ה)

x_n	5	3	2	1.5	1.25	1.125	...	...	...	...	...
e_n	4	2	1	0.5	0.25	0.125	...	...	...	...	...

שאלה המבחן להבנת: מהו סדר ההכנסה על x_n ?
 הוכח יאמרו, כי זו אלא נוסחון. אך ק' משו' למע'ה
 המכסה שההכנסה היא מסדר ראשון. אך זה?
 כי $f'(1) = f'(1) \neq 0$, לפ'ה אין כי מכנסה מסדר ג' .
 על נוסחון.