אנליזה נומרית - שיעור 9

אינטרפולציה

מה למדנו עד כה?

1. בניית פולינום האינטרפולציה:
   - שיטה ישירה (וונדרמונד)
   - שיטת לגרנז' (הצגה עם ה-$L_i(x)$)
2. קירוב פונקציות באמצעות פולינום:

$$e(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W_{n+1}(x)$$

$$W_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

שיטת ניוטון לאינטרפולציה

נגדיר $q_n(x)=p_n(x)-p_{n-1}(x)$

פולינום האינטרפולציה עבור $\{x_0,\dots,x_n\}$

פולינום האינטרפולציה עבור $\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$

<u>שאלה</u>: כמה שורשים יש ל- $q_n(x)$? (נניח $y_n\neq 0$)

<u>למה (1)</u> (ללא הוכחה): אם x_n הוא שורש של $p(x)$ מדרגה n אזי קיים $r(x)$ מדרגה $n-1$ כך ש- $p(x)=(x-x_n)r(x)$

<u>למה (2)</u>: הנקודות $x_0,\dots,x_{n-1}$ הן שורשים של $q_n(x)$

<u>הוכחה</u>: $\forall i=0,\dots,n-1.\ q_n(x_i)=p_n(x_i)-p_{n-1}(x_i)=y_i-y_i=0$

<u>פתרון לשאלה</u>: מלמות (1),(2) מקבלים:

$$\underbrace{q_n(x)}_{\deg\le n}=\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}_{\deg=n}\cdot\underbrace{r(x)}_{\text{קבוע. נסמן } a_n}$$

לכן יש בדיוק n שורשים.

<u>משפט</u>: הפולינום $q_n(x)=p_n(x)-p_{n-1}(x)$ מקיים $q_n(x)=a_nW_n(x)$ כאשר $W_n(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$.

המשפט נובע באופן ישיר ממה שכרגע הוכחנו.

אז אנחנו יודעים לתאר את q_n עד כדי מקדם a_n.

מציאת a_n

נשים לב שהשתמשנו בכל נקודות האינטרפולציה. למשל (x_n,y_n).
נשתמש בה כדי למצוא את a_n.

$$q_n(x_n) = \overbrace{p_n(x_n)}^{y_n} - p_{n-1}(x_n) = a_n w_n(x_n)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{w_n(x_n)} = \underbrace{f[x_0,\dots,x_n]}_{\text{הפרש מחולק}}$$

עכשיו נוכל סוף סוף לתאר כיצד נראית צורת ניוטון לאינטרפולציה:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n w_n(x)$$

כאשר $a_k = f[x_0,\dots,x_k]$

תכונות ההפרש המחולק

אנחנו יודעים ש- a_n הוא המקדם של x^n ב- p_n (לפי השאלה בסוף העמוד הקודם). אך מצורת לגרנז' אנחנו יודעים ש-

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

בכל אחד מגורמי הסכום, המקדם של x^n הוא $f(x_i)\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j}$.

לכן,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j}$$

מסקנות

מהמשוואה המפורשת שקיבלנו עבור a_n ניתן להסיק את התכונות הבאות:

i. $a_n(x_0,x_1,\dots,x_n)$ היא פונקציה חלקה (גזירה ∞ פעמים) כל עוד $\forall i\neq j.\ x_i \neq x_j$

ii. סדר הנקודות $x_0,x_1,\dots,x_n$ לא משנה את $a_n=f[x_0,\dots,x_n]$

iii. $f=\alpha g+\beta h \Rightarrow f[x_0,\dots,x_n]=\alpha g[x_0,\dots,x_n]+\beta h[x_0,\dots,x_n]$

למה: $$f[x_0,\dots,x_n]=\frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

הוכחה: באינדוקציה.

בסיס: $f[x_0]=f(x_0)$

צעד: נניח שהנוסחה מתקיימת עבור n נקודות.

$$\frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}=\frac{1}{x_n-x_0}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}-\sum_{i=0}^{n-1}y_i\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}\frac{1}{x_i-x_j}\right)$$

נסכום את המקדמים עבור כל ה-y_i-ים:

$$y_0:\ -\frac{y_0}{x_n-x_0}\prod_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{n-1}\frac{1}{x_0-x_j}$$

$$y_n:\ \frac{y_n}{x_n-x_0}\prod_{\substack{j=1\\j\neq n}}^{n}\frac{1}{x_n-x_j}$$

עבור $0<i<n$:

$$y_i:\ \frac{y_i}{x_n-x_0}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}-\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n-1}\frac{1}{x_i-x_j}\right)=\frac{y_i}{x_n-x_0}\left(\frac{1}{x_i-x_n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}\frac{1}{x_i-x_j}-\frac{1}{x_i-x_0}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}\frac{1}{x_i-x_j}\right)$$

$$=\frac{y_i}{x_n-x_0}\left(\frac{1}{x_i-x_n}-\frac{1}{x_i-x_0}\right)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}\frac{1}{x_i-x_j}=\frac{y_i}{x_n-x_0}\cdot\frac{x_n-x_0}{(x_i-x_n)(x_i-x_0)}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}\frac{1}{x_i-x_j}$$

$$=y_i\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$$

סה"כ קיבלנו:

$$\frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}=f[x_0,\dots,x_n]$$

לפי הנוסחה של a_n מסעיף הקודם

כתוצאה מהלמה אנחנו יודעים כי:

$$f[x_0]=f(x_0)$$

$$f[x_0,\dots,x_n]=\frac{f[x_1,\dots,x_n]-f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

טבלת הפרשים מחולקים

באמצעות את משוואות אלה אפשר לחשב פולינומים מערכיהם בנקודות מסוימות (במילים אחרות - אינטרפולציה).

<u>דוגמא:</u> נחשב את $p(x)=x^3+3x^2+2x+5$ מערכיו בנקודות $2,-1,1,0$.

x_i	$f(x_i)$
0	5
1	11
-1	5
2	29

נחשב את כל ה- $f[\dots]$-ים באמצעות הנ"ל באופן רקורסיבי:

$$f(0)=5,\quad f(1)=11,\quad f(-1)=5,\quad f(2)=29$$

$$f[0,1]=\frac{11-5}{1-0}=6,\quad f[1,-1]=\frac{5-11}{-1-1}=3,\quad f[-1,2]=\frac{29-5}{2-(-1)}=8$$

$$f[0,1,-1]=\frac{3-6}{-1-0}=3,\quad f[1,-1,2]=\frac{8-3}{2-1}=5$$

$$f[0,1,-1,2]=\frac{5-3}{2-0}=1$$

כעת נציב לפי צורת ניוטון (כפי שהגדרנו בעמוד הקודם):

$$P_3(x)=f(0)+f[0,1]x+f[0,1,-1]x(x-1)+f[0,1,-1,2]x(x-1)(x+1)$$
$$=5+6x+3x(x-1)+x(x-1)(x+1)=x^3+3x^2+2x+5$$

סה"כ כלל החישובים היא $O(n^2)$ (אך עם מקדם קטן יותר מזה של שיטת לגרנז').

<u>שאלה:</u> אם כבר נעביר את p_n לצורה הסטנדרטית, כמה זמן לוקח לחשב הצבה של x מסוים ב- p_n?

<u>תשובה:</u>

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots$$
$$=a_0+(x-x_0)(a_1+(x-x_1)(a_2+(x-x_2)(\dots)))$$

החישוב "לקח" $O(n)$ פעולות.

שאלה: נניח שחישבנו את $p_n(x)$, ונרצה להוסיף עוד נקודה x_{n+1}. מה יהיה המחיר של לחשב את $p_{n+1}(x)$ בכל אחת מהשיטות?

1. בשיטה הישירה: $O(n^3)$ (או $O(n^{2.7})$)
2. לגרנז': לכל l_i יש עדכון במחיר של $O(n)$ - סה"כ $O(n^2)$
3. ניוטון: $O(n)$ בהנחה ששמרנו חישוב עבר.

קירוב אינטרפולרי

שיטת ניוטון לא רק נותנת לנו דרך נוספת לבנות פולינומי קירוב אלא גם דרך נוספת לנתח את הקירוב שלנו.

משפט: אם $x \neq x_i \ \forall i=0,\dots,n$ אז

$$e(x)=f(x)-p_n(x)=f[x_0,\dots,x_n,x]W_{n+1}(x)$$

בנוסף

$$f[x_0,\dots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

הוכחה: נבנה פולינום אינטרפולציה ל-f, $p_{n+1}(s)$, עם הנקודות $x_0,x_1,\dots,x_n,x$ אז:

$$p_{n+1}(s)=p_n(s)+s[x_0,\dots,x_n,s]W_{n+1}(s)$$

בפרט, נציב $s=x$:

$$f(x)=p_{n+1}(x)=p_n(x)+f[x_0,\dots,x_n,x]W_{n+1}(x)$$

$$e(x)=f(x)-p_n(x)=f[x_0,\dots,x_n,x]W_{n+1}(x)$$

בנוסף, מהשיעור שעבר נזכור:

$$e(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W_{n+1}(x)$$

לכן:

$$f[x_0,\dots,x_n,x]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

הפרשים מחולקים עם נקודות זהות

מה קורה אם $x_n=x_0$?

הנוסחאות המקוריות לא מוגדרות. ניתן לקבל הגדרה חדשה.

משפט:

$$\lim_{h\to 0} f[x_0,\dots,x_n,x,x+h] = \frac{\partial}{\partial x} f[x_0,\dots,x_n,x]$$

הוכחה:

$$f[x_0,\dots,x_n,x,x+h] = \frac{f[x_0,\dots,x_n,x+h] - f[x,x_0,\dots,x_n]}{x+h-x}$$

$$= \frac{f[x_0,\dots,x_n,x+h] - f[x_0,\dots,x_n,x]}{h} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f[x_0,\dots,x_n,x]$$

מסקנה:

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

נכליל את הגדרת ההפרש המחולק:

$$f[x,x] = f'(x)$$

$$f[x,x,x] = \frac{f''(x)}{2!}$$

$$\dots$$

$$f[\underbrace{x,x,\dots,x}_{n+1 \text{ times}}] = \frac{f^{(n)}}{n!}$$

הערה: אינטרפולציה שמשתמשת בערכי נגזרות קרויה אינטרפולצית הרמיט (Hermite).

דוגמא: נמצא פולינום שמקרב את $\sin(x)$ בנקודות $0,0,0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$:

$$\sin(0)=0$$

$$\sin'(0)=1$$

$$\sin''(0)=0$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\sin'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0$$

נבנה טבלת הפרשים מחולקים:

$$f(0)=0$$
$$f(0)=0$$
$$f(0)=0$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f[0,0]=f'(0)=1$$
$$f[0,0]=f'(0)=1$$
$$f\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]=\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$
$$f\left[\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]=f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f[0,0,0]=\frac{f''(0)}{2!}=0$$
$$f[0,0,1]=1-\frac{2}{\pi}$$
$$f[0,1,1]=-\frac{4}{\pi^2}$$

$$f[0,0,0,1]=\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)$$
$$f[0,0,1,1]=\frac{4}{\pi^2}\left(1-\frac{4}{\pi}\right)$$

$$f[0,0,0,1,1]=\frac{8}{\pi^3}\left(1-\frac{6}{\pi}\right)$$

נציב בצורת ניוטון:

$$p_4(x)=0+1x+0x^2+\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)x^3+\frac{8}{\pi^3}\left(2-\frac{6}{\pi}\right)x^3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

ונבדוק את דיוק הקירוב:

$$|p_4(x)-\sin(x)|\approx 1.6\cdot 10^{-5}$$

<u>שאלה:</u> מה קורה כאשר כל הנקודות ~~[illegible]~~ מתלכדות?

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

והשגיאה היא

$$e(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$