

14.5.09

קניית פולינום - אינטרפולציה

אינטרפולציה

כנסת: נתון $n+1$ נקודות (x_i, y_i) נמצא פולינום $p_n(x)$ כזה ש:
 $p_n(x_i) = y_i$ לכל i (הפולינום עובר דרך כל הנקודות)

הבעיה:

1. הבעיה הישנה

הבעיה:

x_i	1	2	4
y_i	3	2	1

$$p_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

$$3 = y_0 = p_2(1) = c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2$$

$$2 = p_2(2) = c_0 + 2 \cdot c_1 + 2^2 \cdot c_2$$

$$1 = p_2(4) = c_0 + 4 \cdot c_1 + 4^2 \cdot c_2$$

נכתוב את המערכת המטריצית:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde}} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$p_2(x) = \frac{13}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}x^2$$

2. בעיה חדשה

נתון $n+1$ נקודות (x_i, y_i) $i=0, \dots, n$ נמצא פולינום L_i כזה ש:

$$\forall j=0, \dots, n \quad L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$\tilde{L}_0(x) = (x-2)(x-4) \quad \text{לפי } i=0 \quad \text{שאר}$$

$$\tilde{L}_0(x_1) = \tilde{L}_0(2) = 0$$

$$\tilde{L}_0(x_2) = \tilde{L}_0(4) = 0$$

$$\tilde{L}_0(x_0) = 1$$

הפולינום

לכן צבין אנחנו את $\tilde{L}_0$ בסך הכל

$$L_0(x) = \frac{\tilde{L}_0(x)}{\tilde{L}_0(x_0)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{-2}$$

קצרה זוהי:

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

אזכור, נראה את הרכיבים:

$$p_2(x) = \gamma_0 \cdot L_0(x) + \gamma_1 \cdot L_1(x) + \gamma_2 \cdot L_2(x)$$

מה המחר של כל זה?

בסעיף השני: פנינו למערכת

$$O(n^3) = (n+1) \times (n+1)$$

(קריאה אחרת בסביבת $O(n^3)$)

בסעיף השני: יש ח"ג "קט"א. זוהי $O(n)$ למעשה

כל (x) ולכן סה"כ $O(n^2)$.

קירוב פולינומלי ע"י אינטרפולציה

נתון $f \in C^{n+1}$ ו- $n+1$ נקודות מהצורה $(x_i, f(x_i))$

נבנה את $p_n(x)$ ונקודת האמצע של $f(x)$

כדי שיהיה בעבור, שיהיה האינטרפולציה (פונקציה) הנכונה

אנחנו מחפשים באמצעות $p_n(x)$ ולא $f(x)$ היא:

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)$$

$$W_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

קירוב לסדר גבוה

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_2(x) = \sin(x) + 10^{-20} \sin(1000x)$$

(נראה שיש הבדל קטן)

נראה f_1 ו- f_2 קרובים.

* נכון למחלקת מה היתה
"נראה" בחינה "שאלה"
קצרים במחלקה

לרעיון: $f \in C^3$, $f: (a, a+h) \rightarrow \mathbb{R}$. יהי p_1 פולינום האינטרפולציה
 על $\{a, a+h\}$ נקודות אינטרפולציה. חסום על $W_2(x)$ האינטרפולציה.

פריקו:

$$f - p_1 = e(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x-a)(x-(a+h))$$

חסום $|e(x)|$ על

חסום $|W_2(x)|$ על $M = \max_{\xi \in (a, a+h)} |f''(\xi)|$

נציג $s = x - a$, $s \in [0, h]$
 $(x-a)(x-a-h) = s(s-h)$

$\max_s |s(s-h)| = \left| \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2} - h \right) \right| = \frac{h^2}{4}$

קיבלנו סה"כ $|e(x)| \leq \frac{M}{8} h^2$

הערה: חלקנו בלא חשבון שזה קצת חמור. למדור M כל

ולחשב זה. יכולנו גם למדור $|e(x)|$ על $M = \max_{x \in (a, a+h)}$ ולומר

שהוא M . הסבה שאנחנו לא רוצים להשתמש בה

כי יש לנו חלק של W_n בחסום. כפי שראינו את החסום הזה

בין עצמם סדר סדר של הפונקציה, אך כאן נרצה להראות

שאנחנו צוקים עצמם דבר של הפונקציה עצמה כדי לחסום

את W_n .

שאלה: נרצה לקרב את $\sin x$ בקטע $[1, 10]$ ע"י פונקציה

אחיד. נאמר נקודות אינטרפולציה: $x_i = 1 + i \cdot \frac{9}{n}$, $i = 0, 1, \dots, \frac{9}{h} = n$.

(א) חסום נקודות האינטרפולציה. נרצה דיוק של 10^{-4} על $|e(x)|$.

אינטרפולציה ישירה עם גודל n (כלומר אנחנו רוצים להעריך

עצמם אחיד). נרצה לבדוק אינטרפולציה לאחידה.

של אינטרפולציה כשיש פסגה וידי הקטעונים של האינטרפולציה

הם קטנים.