

10.5.09

אנליזה נומרית - שיעור 8

אינטרפולציה עדי פולינומית

בהינתן N נקודות: $(x_i, y_i), i=0, \dots, N$, מבו הבולטות $P(x)$ המקיים $y_i = P(x_i)$ לכל $i=0, \dots, N$ ממסר לכל היותר N .

כמה מהם זה?

1. פולינומים הם הצגות היחידות שאינן יוצאות לשלש אגף

חישובים (לפסלים של פונקציות כליונטאזר)

2. אנליזה נומרית (אז צאצא, נשעם למה)

עקרונות יש שני סוגים של פולינומים:

פולינום אלגרי: $\sum_{i=0}^N \alpha_i x^i$

פולינום אריטמטי: $\sum_{j=-N}^N \alpha_j e^{jx}$ (כאן $i=1$)

איננו משתמשים בפולינומים אלגריים (מזהם למה)

הבעיה: נתונים $(x_i, y_i), i=0, \dots, N$

כונצים למחשב פולינום ממסר $N-1$ או יותר $N-1$ המקיים: $y_i = P(x_i)$ לכל $i=0, \dots, N$

(ישא לא שיש לנו $N+1$ נקודות)

שאלה I:

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i x^i = (1, x, x^2, \dots, x^N) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

נסיון אחר:

עכשיו נראה שיש לנו באמצעות מרחב וונדרמונד:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde}} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

כא שטיין פארט דאס ערשטע און האט זיך וואקסן און געווען
א היסטאריע. אז נאר שטאנדיג באלד הייסט זיך נישט
זי או קיינער ווי $n+1$ נקיבה שוואַך אז האט זיך גלייב
געהייר הויפט (בלויז) גלייב נישט פארט אינטערסאנט באמערקט
גיט (א).

* Vandermonde $B^T C$ s.t. $i \neq j$ $G \quad x_i \neq x_j$ $PE = \underline{\text{yes}}$

* עמדה גבוהה
על ארבע רגליים

הוכחה: נסמן $V(x_0, x_1, \dots, x_N) \sim \chi^2$ הולצמן "0. $x_0, \dots, x_N$ כח χ^2 ו χ^2 "0:

$$\det(V(x_0, \dots, x_N)) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

$\det(V(x_0)) = 1$ $N=1, 2, 1120$ $\text{לפי } N \text{ נבחר } x_0$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = (x_1 - x_0) \neq 0 \Leftrightarrow x_1 \neq x_0$$

סדר n הוא סדרה של $V(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ כאשר x הוא
 סדרה של $V(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ (הסדרה של x).

$$\det(V(x_0, \dots, x_N, X)) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N & x_0^{N+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N & x_1^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N & x_N^{N+1} \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^N & X^{N+1} \end{pmatrix}$$

נצטרך אתן להפיק את הנתונים ה"סביבה" של הנתונים
 לפי הנושא. אכן, ברור כי של נפרד בואנוס ש"ס"נו נקרא
 בולט. ב-X משהו ו+M. אך נצטרך ב-X את ה"צורה" ו
 בולט. נקרא מהמורה. תורת הנצטרך וכן הנתונים הם למס.
 לכן, יא משהו את הנתונים (הנתונים של הנתונים) וכן
 מוכרן של הנתונים. מכיון שיש ו+M פחות, כולם, ומה
 הנתונים הם ו+M, קבלו מהנתונים, נראה כי:

$$\det(v) = c \prod_{i=0}^N (X - x_i)$$

כאשר $\mathbf{x}$ הוא המרחב של X^{N+1} . מלבד, כל נקודה
 הנמצאת במרחב $\mathbf{x}$ לפי עמדה, ונבחר לפי המערכת
 המרחבית, כל נקודה במרחב של X^{N+1} היא בעצם

$$\det(V(x_0, x_1, \dots, x_N))$$

 היא $\prod_{j=0}^N \prod_{i=0}^j (x_j - x_i)$

עכשיו, נניח שיש לנו $N+1$ נקודות במרחב $\mathbf{x}$.

$$\det(V(x_0, \dots, x_{N+1})) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{N+1} (x_j - x_i)$$

כעת, הנקודות הן נקודות שונות מאדם $x_i \neq x_j$ עם $j \neq i$.
 למעשה, במרחב $\mathbf{x}$ יש לנו $N+1$ נקודות שונות. כל הנקודות
 הן שונות זה מזה, ויש לנו $N+1$ נקודות שונות. הנקודה
 היא שיש דורג $(N+1)$ בסולם.

II: שיטת לזרז

הבעיה היא: אנו רוצים פולינום שקיים $p(x_i) = y_i$ לכל i .
 עם נקודה לבנה את כולם של פונקציות, כל מה שאנחנו
 רוצים x_i אחד. נניח פונקציות $L_0, L_1, \dots, L_N$ ש"ל"ו:

$$L_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x = x_j, j \neq i \\ \text{don't care else} \end{cases}$$

ואם הפולינום אנו רוצים להשיג 'היה'.

$$p(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + \dots + L_N(x) \cdot y_N = \sum_{i=0}^N L_i(x) \cdot y_i$$

ואם אנו רוצים x_i כל i - ל- P יאדם כלשהו. כל
 בחינה של P יהיה באחד הפולינום, (כלומר $L_0, \dots, L_N$)
 ידוע על P הפולינום. נראה לך קונו פולינום כזה:

$$L_2 = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^2 \left(\frac{x-x_i}{x_2-x_i} \right) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

לכן $P(x)$ נכתב:

$$P(x) = 1 \cdot L_0(x) + 5 \cdot L_1(x) + 11 \cdot L_2 = x^2 + 3x + 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

13 חלק ב'

$$x_0 = 0, f(0) = 1$$

$$x_1 = 1, f(1) = 3$$

$$x_2 = 2, f(2) = 5$$

לפינון שקטת L_i תמיד רק בערך x_i ולא y_i , והמשוואה
ערכי x_i אין קווקר לבנות G ולמשל.

$$P(x) = 1 \cdot L_0(x) + 3 \cdot L_1(x) + 5 \cdot L_2(x) = 1 \cdot \frac{x^2-3x+2}{2} + 3 \cdot \frac{4x-2x^2}{2} + 5 \cdot \frac{x^2-x}{2} \\ = 0x^2 + 2x + 1$$

נראה הוכחה מידית (אפשר גם תבונה). נניח כי
נניח P, Q ממשלה G $i=0, \dots, N$ כאשר $P(x_i) = y_i, Q(x_i) = y_i$
הינן N - כל אחד $P-Q$ ממשלה G הינן N .
נניח $(P-Q)(x_i) = 0, i=0, \dots, N$. גורם $P-Q$ ממשלה
ה- $N+1$ נקודות (ממשלה) G הינן N . $P-Q \equiv 0$
כלומר $P \equiv Q$.

שאלה האם תבונה

נניח הינן G בנקודה G (אולי) (כלומר בנקודה) G
שניתן ידועה לנו. נראה שכל אחד מהם איננו תבונה. נראה
עכשיו שכל אחד מהם חזק יותר מהאחר. האם זה
נכון? (אולי אפשר להוכיח).

דוגמה: נניח כי $f \in C^{N+1}(I)$ ו- I קטע המסלול a ב- I קצוות האינטרפולציה
 ג'ון ו- n הנקודות שרובים למצוא בה הטענה. אז:

$$E_N(x) = f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{N+1} W_{N+1}(x)$$

$$W_{N+1}(x) = \prod_{i=0}^N (x - x_i) \quad \text{עבור כל } x \text{ במסלול}$$

הוכחה:

עבור נקודות האינטרפולציה הנכונות, $E_N(x)$ בטענה הוא 0
 ולכן $W_{N+1}(x)$ מתאפס.

עבור נקודה אחרת, נקודות האינטרפולציה, נבדוק הפונקציה:

$$G(x) = E_N(x) - \frac{W_{N+1}(x) E_N(x)}{W_{N+1}(x)}$$

כאשר x היא הנקודה עבורה אנחנו מחפשים את הטענה ו-1
 היא משקל הפונקציה G . חשוב לזכור ש- $W_{N+1}(x)$ אפס
 (כי x לא נקודה אינטרפולציה) ולכן הפונקציה מאפסת.

f מציבה $N+1$ מסלול, ו- W, P פולינומים, לכן אם
 $G \in C^{N+1}(I)$. G - G יש $N+2$ אפסים. $N+1$ הם נקודות
 האינטרפולציה, ואם x הנקודה צורה אפס יורדים למסלול
 בטענה). נראה שזה:

$$G(x_i) = E_N(x_i) - \frac{W_{N+1}(x_i) E_N(x_i)}{W_{N+1}(x_i)} = 0 \quad i=0, \dots, N$$

$$G(x) = E_N(x) - \frac{W_{N+1}(x) E_N(x)}{W_{N+1}(x)} = 0$$

לכן סך הכל $N+2$ אפסים. לכן נקודה $G'(x)$ יש $N+1$
 אפסים שונים, וכן $G''(x)$ יש N אפסים אחרים וכן הלאה.
 עכשיו $G^{(N+1)}(x)$ יש N אפסים בלבד, נסמן אותם ξ .

$$E_{N+1}(x) = f^{(N+1)}(x) \quad \text{אם } x \text{ לא שייך ל-} I$$

$$E_{N+1}(x) = f^{(N+1)}(x) - P_{N+1}(x) = f^{(N+1)}(x) \quad \text{אם } x \text{ שייך ל-} I$$

$$W_{N+1}^{(N+1)}(t) = (N+1)!$$

-e 1d 989' 1/10/16

$\Rightarrow$ W_{n+1} is a $\mathbb{Q}$ -vector space

$$G^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(t) - \frac{(N+1)! E_N(x)}{w_{N+1}(x)} \quad \forall t \in I$$

קצת, מיליון ש"ח בלבד, $t = 3$ שנים, $R^{(n+1)}$

$$0 = f^{(N+1)}(\xi) - \frac{(N+1)! E_N(x)}{W_{N+1}(x)}$$

$\approx 5/c$

A simple hand-drawn smiley face with two curved lines for eyes and a wide, upward-curving line for a mouth.

$$E_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} W_{N+1}(x)$$

אמכן חובתנו אל ה' (ש"פ)