9.7.09

אנליזה נומרית - שיעור חזרה למבחן

חזרה על הוכחת מינימליות פולינום צ'בישב:

פולינום צ'בישב הוא זה: $T_m(x)=\cos(m\cos^{-1}(x))$

נוכיח שהפולינום (מחולק ל-2^{m-1}) מקיים את תכונת המינימקס, כלומר הוא הפולינום שהמקסימום של בקטע $[-1,1]$ הוא מינימלי, מתוך כל הפולינומים מסדר m, המתוקנים (המקדם של x^m הוא אחד).

מכיוון ש-T_m הוא $\cos$ של משהו, הערך המקסימלי שלו הוא 1 ולכן הערך המקסימלי של $\frac{1}{2^{m-1}}T_m$ הוא $\frac{1}{2^{m-1}}$.

מכיוון שהוא פולינום בסדרת פולינומים אורתוגונליים, אנחנו יודעים שיש לו $m+1$ נקודות קיצון וערכו בהם (בערך מוחלט) שווה לאחד.

נניח בשלילה כי קיים פולינום P_m שעבורו $\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|<\frac{1}{2^{m-1}}$ והמקדם של x^m הוא אחד. נסתכל על נקודות הקיצון של T_m $x_0,x_1,\dots,x_m$.

אנחנו יודעים כי מתקיים:

$$P_m(x_m) < 2^{-(m-1)} = T(x_m)\cdot 2^{-(m-1)}$$

$$P_m(x_{m-1}) > -2^{-(m-1)} = T(x_{m-1})2^{-(m-1)}$$

...

כעת נגדיר $Q=T\cdot 2^{-(m-1)}-P_m$. אנחנו יודעים כי Q ממעלה $m-1$, מכיוון שהמקדם של x^m ב-$T\cdot 2^{-(m-1)}$ וב-P_m היה אחד, ולכן זה הצטמצם. נסתכל על ערכי Q בנקודות הקיצון של $T\cdot 2^{-(m-1)}$:

$$Q(x_m)>0$$

$$Q(x_{m-1})<0$$

...

$$Q(x_0) \gtrless 0$$

תלוי בזוגיות m

לכן Q מחליף סימן לפחות m פעמים, ולכן ל-Q יש לפחות m אפסים. אך בדרגה $m-1$ ולכן $Q\equiv 0$. הגענו לסתירה, כי הנחנו ש-P_m קטן מ-$T_m\cdot 2^{-(m-1)}$ וגילינו שהוא שווה לו.

איך כל זה עוזר לנו בחישובי שגיאה?

אנחנו יודעים כי באינטרפולציה מתקיים:

$$f = P_m + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!} W(x)}_{\text{שגיאה}}$$

בדרך כלל, לא נוכל להשפיע על שום דבר למעט נקודות האינטרפולציה שאנחנו בוחרים, אשר משפיעות על גודל $W(x)$.

$$W(x) = \prod_{j=0}^{m} (x - x_j)$$

נשים לב שזהו פולינום מעלה $m+1$ עם מקדם אחד ל-x^m. לכן, W מינימלי כאשר הוא שווה ל-$T_{m+1} \cdot 2^{-m}$, כלומר כשהנקודות הן השורשים של המשוואה $\cos(m \cos^{-1}(x))$, כלומר נקודות צ'בישב.

נקבל שהשגיאה המקסימלית תהיה $\frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{2^m}$, לעומת אינטרפולציה רגילה (אחידה למשל) שתתן בדרך כלל שגיאה בסדר גודל $\frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!} \cdot 1$

נעבור לנושא אחר.

__שגיאת אינטגרציה__

נרצה לחשב את האינטגרל $\int_a^b f(x) w(x) dx$ עבור $w(x)$ פונקציית משקל חיובית כמעט בכל מקום. נזכר שזו אינה $W(x)$ שהתעסקנו איתה עד עכשיו. לשם מניעת בלבול, נקרא ל-$W(x)$ הישנה בשם $\Psi(x)$ (כי תמיד להחליף שמות של פונקציות באמצע שיעור מונע בלבול...)

כעת, נקרב את האינטגרל באמצעות אינטרפולציה ואז אינטגרציה על הפולינום. נקבל:

$$I = \int_a^b f w dx = \int_a^b P_m w \, dx + \int_a^b f[x_0, \dots, x_m, x] \cdot \Psi \cdot w \, dx \qquad \left(\Psi(x) = \prod_{j=0}^{m} (x - x_j)\right)$$

נשים לב כי אם נסתכל על האינטרפולציה באינטרפולציית לגרנז', ואז:

$$P_m = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) l_j(x) \implies \int_a^b P w \, dx = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \underbrace{\int_a^b l_j(x) w(x) dx}_{A_j}$$

יהיו A_j המשקלים שלנו. נשים לב שהם אינם תלויים ב-f ולכן ניתן לחשב אותם ואז להשתמש בהם על מנת לעשות אינטגרציה לפונקציות רבות.

נעבור לחשב את השגיאה.

I. אם $(\omega\Psi)$ בעל סימן קבוע:

אז נוכל להשתמש בתכונת ערך הביניים ולהוציא את $f[x_0,\dots,x_m,x]$ מהאינטגרל:

$$E_m = f[x_0,\dots,x_m,\xi]\int_a^b \omega\Psi\,dx = \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}\int_a^b \omega\Psi$$

> שאלה בכיתה: אתה מוכן להסביר איך השתמשנו במשפט ערך הביניים פה?
>
> המרצה: יש שלושים משפטים שקוראים להם משפט ערך הביניים. אז אתה לא יודע למה זה נכון, פשוט תגיד שזה בגלל ערך הביניים.

אבל עכשיו ברצינות, המשפט שאנחנו משתמשים בו הוא:

אם סדק g מקיים: $\min f\cdot\int g\,dx \le \int fg\,dx \le \max f\int g\,dx$

זה היה המקרה הפשוט.

II. אם $\int_a^b \omega\Psi\,dx = 0$:

נשתמש בטריק: אם נסתכל על הנוסחה הרקורסיבית של ההפרשים המחולקים:

$$f[x_0,\dots,x_m,x_{m+1},x] = \frac{f[x_0,\dots,x_m,x]-f[x_0,\dots,x_m,x_{m+1}]}{x-x_{m+1}}$$

נעביר אגפים כך שיהיה לנו נוח לעבוד איתה:

$$f[x_0,\dots,x_m,x] = (x-x_{m+1})f[x_0,\dots,x_m,x_{m+1},x] + f[x_0,\dots,x_m,x_{m+1}]$$

אז עכשיו ניזכר בנוסחת השגיאה שהייתה לנו <u>לפני</u> I, (זהו ייצוג אלטרנטיבי למקרים אחרים). היא הייתה:

$$E_m = \int_a^b f[x_0,\dots,x_m,x]\cdot\Psi\cdot\omega\,dx$$

ועכשיו נשתמש בנוסחה:

$$= \int_a^b (x-x_{m+1})f[x_0,\dots,x_m,x_{m+1},x]\Psi\omega\,dx + \int_a^b \underbrace{f[x_0,\dots,x_{m+1}]}_{\text{קבוע, לכן ניתן להוציא ואז כל האינטגרל שווה לאפס.}}\omega\Psi\,dx$$

אם נבחר x_{m+1} כך ש-ψw ..., באנלוגיה ל-Z נקבל
ונשארנו עם:

$$\int e_m = E = \frac{f^{(m+2)}(\eta)}{(m+2)!}\int_a^b w\psi_{m+2}\,dx$$

שיטת גאוס

שיטת גאוס היא מקרה פרטי של האפשרות השנייה. נבחר את ψ_{m+1} כמו איבר בסידרת פולינומים אורתוגונליים המוגדרת ע"י המכפלה

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b fg\,w\,dx$$

עכשיו נראה מה נוכל להגיד על $\int_a^b w\psi\,dx$:

$$\int_a^b w\psi\,dx = \int_a^b \psi\cdot 1\cdot w\,dx = \langle\psi_{m+1},1\rangle = 0$$

הוא שווה לאפס לפי התכונה של פולינומים אורתוגונליים שהוכחנו
(התכונה שהם אורתוגונליים לכל פולינום מסדר קטן מהם)
נעבור בזה לחישוב: (נעזר באנלוגיה III)

$$E = \int_a^b f[x_0,\dots,x_{m+1},x]\,w\psi_{m+1}(x)(x-x_{m+1})$$

גם נשים לב כי:

$$\int_a^b w\psi_{m+1}(x-x_{m+1})\,dx = \langle\psi_{m+1},(x-x_{m+1})\rangle = 0$$

ולכן שוב נוכל להשתמש ב-II.

$$E = \int_a^b f[x_0,\dots,x_{m+2},x]\,w\,\psi_{m+1}(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\,dx$$

אבל שוב אנחנו יודעים ש-

$$\int_a^b w\psi_{m+1}(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\,dx = \langle\psi_{m+1},(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\rangle = 0$$

ולכן נוכל להשתמש שוב ב-II. נמשיך לעשות את II, ומתי נעצור?
לא נוכל להשתמש בכלל כאשר הסדר של הפולינום שהוספנו יהיה שווה לסדר של ψ_{m+1}, כלומר כשמכפלתם תהיה ψ_{2m+2}. (כי אז הסדר יהיה בהה ולא מתקיימת התכונה שהם אורתוגונליים). נבחר את x_{m+1} הנקודות הנוספות כמו אותן נקודות כמו הישנות ואז ל-$\psi_{2m+2}w$ יש סימן קבוע. נשתמש לבסוף ב-Z ונקבל:

$$E = \frac{f^{(2m+2)}(\eta)}{(2m+2)!}\int\psi_{2m+2}\,w\,dx$$

Condition number

זה אחד הנושאים החשובים ביותר בקורס מבחינת סד׳. נציג אותו בצורה אבסטרקטית: יש לנו תהליך $M(x,b)$ למשל, אז הקשר

x - תוצאה. b - data

היא $Ax=b$ אז b זה הנתון ו-x זה התוצאה. השאלה היא מהו היחס בין Δx ל-Δb, כלומר איזה שינוי ב-Δx יגרם Δb? עכשיו קצת יותר פורמלי:

$$\kappa_{abs} = \sup_{\Delta b \neq 0} \frac{\|\Delta x\|}{\|\Delta b\|}$$

$$\kappa = \sup_{\Delta b \neq 0} \frac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}$$

במקומות שונים בקורס הגדרנו את זה בצורות קצת שונות, אבל זה המהות וזה מה שצריך לדעת. עכשיו נבין איך זה בא לידי ביטוי בנקודות הבחנה מרובות.

<u>גזירה.</u>

הקלט שלנו (שקראנו לו b) הוא f - הפונקציה.

מה שאנחנו מחשבים (x) הוא f' - הנגזרת.

אז:
$$\kappa_{abs} = \sup_{f'} \frac{\|\Delta f'\|}{\|\Delta f\|} = \sup_{f', x_0} \frac{|\Delta f'(x_0)|}{|\Delta f(x_0)|}$$

אבל מה שקיבלנו כאן אינו חסום. למשל, נסתכל על הפונקציה $\Delta f = \varepsilon \cos(\frac{1}{\varepsilon^2} x)$. נקבל

$$\frac{|\Delta f'(x)|}{|\Delta f(x)|} = \frac{\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon \sin \frac{1}{\varepsilon^2} x}{\varepsilon \cos(\frac{1}{\varepsilon^2} x)} \xrightarrow{\varepsilon \to \infty} \infty$$

כלומר, ניתן למצוא פונקציה כך שהיחס יהיה גדול כל שנרצה.

לכן, הסופרימום של זה (שנקרא בהקשר ה-Condition num.) הוא ∞.

נשים לב כי גם אם נגדיר את k של גזירה בנקודה מסוימת (נניח x_0 יהיה קבוע ולא נכניס אותו מתחת לסופרימום) אז עדיין ה-k יהיה אינסוף (הפונקציה שנתנו בדוגמא עדיין תקפה).

אינטגרציה

(מצב של $k(I)$) כאשר $I(f)=\int_a^b f(x)dx$

$$I(f+\Delta f)=\int_a^b f\,dx+\int_a^b \Delta f\,dx$$

(חשב:

$$K_{abs}=\sup_{\Delta f}\frac{\|\Delta I\|}{\|\Delta f\|}=\sup\frac{|\Delta I|}{\|\Delta f\|_\infty}=\sup\frac{\left|\int_a^b \Delta f\,dx\right|}{\|\Delta f\|_\infty}\leq\frac{\|\Delta f\|_\infty(b-a)}{\|\Delta f\|_\infty}=b-a$$

(עבדנו עם $\|\cdot\|_\infty$ כי נוח לעבוד איתה.

$$\|f\|_\infty=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

עבור ΔI, נשים לב שזה אינטגרל מסוים ולכן זהו מספר ממשי ולכן אפשר פשוט לקחת ערך מוחלט)

לכן ה-condition number חסום שלמעלה ע"י הקבוע b-a. לכן תהליך האינטגרציה הוא "תהליך טוב", הפרעות תמיד לא יפריעו לי יותר מדי. (לעומת גזירה).

חישוב אפסים של פונקציות

אנחנו מנסים למצוא s כך ש- $f(s)=0$. אז:

$$K_{abs}=\frac{1}{f'(s)}$$

אנחנו נשתמש ב- K_{abs} על מנת למצוא תנאי עצירה לאיטרציות. היינו רוצים לקבוע תנאי עצירה $|\Delta x|<\varepsilon$, אך אנחנו לא יודעים את Δx_n. לכן נעזר ב- K_{abs}, ונדרוש $\frac{|f(x_n)|}{f'(s)}<\varepsilon$ כלומר $\Delta b\cdot K_{abs}<\varepsilon$. מכיוון שאנחנו לא תמיד יודעים גם את $f'(s)$, אפשר למצוא חסם עליון על $f'(\xi)$.