

08.03.09

# אנליזה נומרית 1 - ש"ר 1

adid@post.tau.ac.il

א"י:

03-6405987

טלפון:

מכתב: א. צ'קובסקי

ש"ר 302

סיכום:

1. י"צו הסדרו למחבר

2. מציאת נקודות שבהן  $f(x)=0$

3. אנליזה של קירוב פונקציה (לפי קושי)

א. אינטרפולציה ע"י פולינום

ב. אינטרפולציה ע"י טריגונומטריה (אורי מרדכי)

4. קירוב של אינטגרלים ע"י נוסח

הקדמה

ישנם מספר פונקציות שאנחנו נדרשים להן במהלך חייהם. ישנן פונקציות שאנחנו צריכים לדעת כיצד לחשב אותן, וישנן פונקציות שאנחנו צריכים לדעת כיצד להעריך אותן. ישנן פונקציות שאנחנו צריכים לדעת כיצד להעריך אותן, וישנן פונקציות שאנחנו צריכים לדעת כיצד להעריך אותן.

במהלך הקורס נלמד כיצד לחשב פונקציות, וישנן פונקציות שאנחנו צריכים לדעת כיצד להעריך אותן, וישנן פונקציות שאנחנו צריכים לדעת כיצד להעריך אותן.

"צורת המספרים במחשב"

מ. נאמן:

- Positional System

- שיטת החסות והמחלקות

- בעיה

כאשר אנחנו כותבים מספר במחשב, אנחנו כותבים:

$$x_{10} = 12.34 = 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$$

ובאופן כללי:

$$x_p = (-1)^s [x_m x_{m-1} x_{m-2} \dots x_1 x_0 x_{-1} \dots x_{-m} x_{-m-1}]$$

$m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$X_\beta = (-1)^s \left( \sum_{k=-m}^m X_k \beta^k \right)$$

ואם, רק ימז, מקוצר:

$$\beta = 2, 8, 16, \dots$$

המספר, קצת,  $\beta$

נמך למחור בן שנייה, אן אשיר למחור -

בקום נאמך במספר 10, בן קל לנן למחור אף.

$$X = (-1)^s \beta^e \sum_{j=0}^m a_j \beta^{-j}$$

"צב למחור Real מחמק:

אם בנח אלו אר שחמק מה עשור למחור?!

אן למחור, "The lecturer works in mysterious ways", אף בן למחור מור רב

$$m = 5$$

\* mantissa = למחור המספר אלו מוסר

\* exponent = ה'ט אן המספר. ש'ט אן ש'ט סופר בן למחור

ק'נ' א-1. מכיון אלו מוסר למחור אן מוסר מוסר אן,

(אף ב'ט) אן אן למחור המספר.

ה- International Electrical Commission קב'ט ב'ט 1988. ע'ט אן

Single Precision, מחמק, Double Precision !

$$\text{Single Precision} = 32 \text{ bit} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 8 & 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Double Precision} = 64 \text{ bit} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 11 & 52 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{אף ב'ט} \\ \text{אף ב'ט} \end{array}$$

אן ב'ט ש'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט

אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט

אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט

(ק'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט)

אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט אן אף ב'ט

בעיה גאומטרית קצת פחות ארווילאית: פתור של אחת מההצגות.

אם נסתכל על כל ההצגות אחר מזה, זה יראה כך:

$$10^0 (1.0000 \dots 000)$$

$$10^0 (1.0000 \dots 001)$$

$$10^0 (1.0000 \dots 002)$$

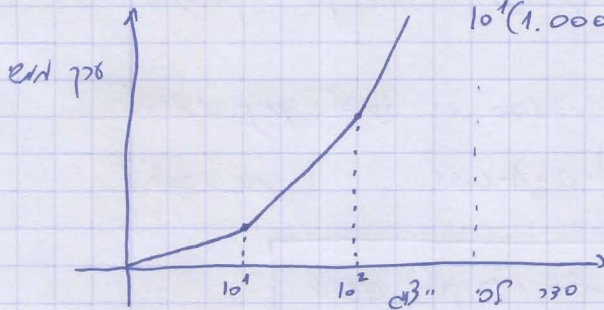
...

$$10^0 (9.999 \dots 999)$$

$$10^1 (1.000 \dots 000)$$

$$10^1 (1.000 \dots 001)$$

$$10^1 (1.000 \dots 002)$$



באופן זה, נציג את כל המספרים:

כאשר ההפרש בין שני מספרים  
הקטנים ביותר, אלא שכל המספרים  
הקטנים ביותר, למעשה:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 2^e \cdot 2^{-m}$$

עם זאת, למרות שהצגה של המספרים, הבעיה היא לא פשוטה:

$$\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} \right| \leq 2^{-m}$$

נסתכל עכשיו על המספרים האחרים:

אילו מספרים אחרים

אם נסתכל על המספרים האחרים, נראה שהם:

$$\begin{array}{r} 0.10000012345 \times 10^0 \\ 0.10000000000 \times 10^0 \\ \hline 0.00000012345 \times 10^0 \end{array}$$

הבעיה היא שהמספרים האחרים הם מספרים קטנים מאוד (למשל  $10^{-5}$ ).

אם נסתכל על המספרים האחרים, נראה שהם:

באופן זה, נציג את כל המספרים:

למרות שהמספרים האחרים הם מספרים קטנים מאוד, הם יכולים להיות חשובים מאוד. למשל, אם נסתכל על המספרים האחרים, נראה שהם:

על היותו סובלית. למעשה זה לא היה יכול לקרות. למעשה אקטור ספרות ערך

זה חשוב? צאצאי הישוב נאמר

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

מחשבת נחשב שזה כך:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

עבור  $\Delta x$  קטן

הבעיה היא שעבור  $\Delta x$  מספיק קטן, כמעט אף  $f(x+\Delta x) - f(x)$  נאמר זה כן  
הסברות של. הוא לא התכן צ'וק מספיק גדול, וכבר כל הסברות של  
מחשבותיו כן בקר שיתרונה (בדיווחא מקורו - אכס'ל).

לפסגה נ'מ אפואי את הבעיה האמצעית יוצר יסודי. לשל, נרצה  
לחשב את  $f(x) = 1 - \cos x$  עבור  $1 < x < 10^{-6}$  (למשל  $x = 10^{-6}$ )

הבעיה: זה לא ריק  
למשל  $x = 10^{-6}$  זה לא ריק

ששאלו לקוראיו בבל: הכניסו למחשבון ונסו לחשב את יצא?

נכנס את  $f(x)$  והיו אור אילור, על מנת שכלול את קטן קרב זמן.

$$f = 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right)$$

קיימנו את כח אחד ואור ואור ואור קטן (או הכנסנו לזמן אזור אזור  $10^{-6}$   
הוא יהיה אזור אזור  $10^{-6}$ . אם ה'מ מחשבים מחשבות. את האור אילור  
את ה'מ אזור:

$$f = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$

ואם זה אף בעיה לחשב.

נ'מ גם להשתמש בזה. נסגור על  $f(x)$ :

$$f(x) = 1 - \cos x = (1 - \cos x) \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

כעת, אצטרף זה הכחל אזור בעליו ואילו לא מחשבים ספרות עק (קטן כן)  
שיתרונה. אם על המחשב לא נאמר אף זה חזקו ולא חיסור.

נסו שטיו לחשב את  $f(10^{-6})$  במחשבון  
 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$   
לזה קוס!

המשפט: נראה כי עבור  $a, b, c$  מסוימים,  $ax^2 + bx + c = 0$  אינו פתור.

נניח למשל  $a=1, b=111.1, c=1.2121$

$$x = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$$

כאשר  $b^2 < 4ac$ , למשל, נקח  $a=1, b=111.1, c=1.2121$ :

$$x^2 + 111.1x + 1.2121 = 0$$

כאשר  $a=1, b=111.1, c=1.2121$  סבורים לייצג מספר.

$$b^2 = 12345$$

$$b^2 - 4ac = 12340$$

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 111.09$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -0.01000$$

סבור, הערך המדויק הוא  $x_1 = -0.01091008036...$  וכן יי שטח א

9%, שנה 5. הרבה (מחבר)

תוצאה: אם לא קורה עבור  $x_2$ ?

הערה: אם  $x_1$  ו- $x_2$  הם שני מספרים, אז  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

(הערה: אם  $x_1$  ו- $x_2$  הם שני מספרים, אז  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ )

(הערה: אם  $x_1$  ו- $x_2$  הם שני מספרים, אז  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ )

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

$$x_1 = \frac{c}{a \cdot x_2} = 0.01091$$

סבור:

שנה הרבה מדיקה.

הערה: אם  $x_1$  ו- $x_2$  הם שני מספרים, אז  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

הערה: אם  $x_1$  ו- $x_2$  הם שני מספרים, אז  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

צריך להבין את המושג.

$$F_b = (f(x) - b)_b = -1$$

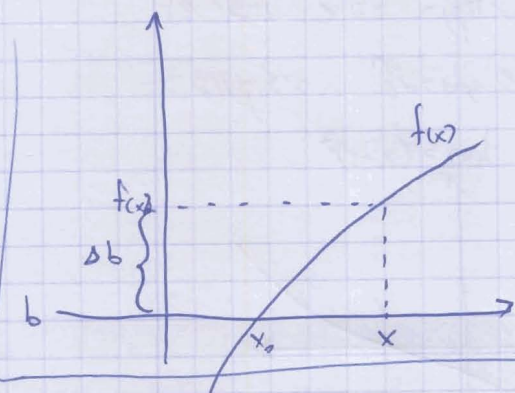
$$F_x = (f(x) - b)_x = f'_x(x)$$

$$\frac{|F_b|}{|F_x|} = \frac{1}{|f'_x(x_0)|}$$

נעזיר לראות את החקלאי כמקור רגש אחר.

יש לנו פונקציה (אולי, ולא ידוע לנו)  $x_0$ .

הפונקציה  $x$  נאמרה. איתנו ידועים לחצוץ השבוע בין  
(על  $b$  - כפי  $F$ ). איתנו נקודת המפגש בין  
שני המסלולים.  $x$  - אולי קרוב ל- $b$ .



המסלול החדש, החשוב לנו:

$$\Delta x \approx \frac{|F_b|}{|F_x|} \cdot \Delta b \stackrel{\text{def}}{=} K_{abs} \Delta b$$

~~Δx~~

אולי  $\Delta x$  ובעצם  $\Delta x$  שגורר קטן  $\Delta b$  שגורר  $\Delta x$  - זהו  $\Delta x$ .

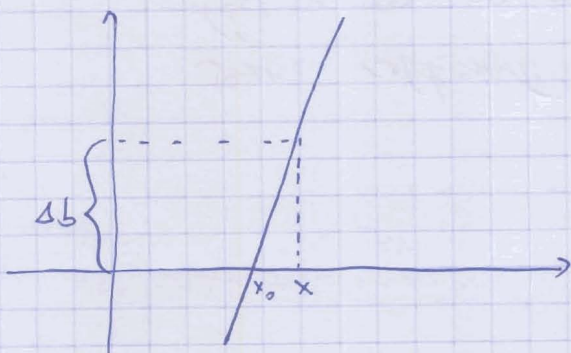
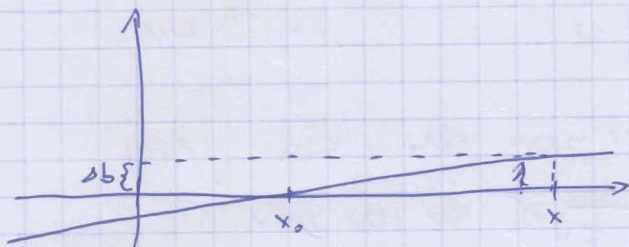
אם הפונקציה  $x$  היא נגזרת:

אם  $\Delta b$  מאז קטן (למשל  $\Delta b$ )

אז  $\Delta x$  גדול.  $\Delta x$  - זהו  $\Delta x$ .

אולי קטן  $\Delta x$ ,  $\Delta b$  - זהו  $\Delta x$ .

שנייה  $\Delta x$  גדול  $\Delta b$  (זהו  $\Delta x$ )



למשל  $\Delta x$  קטן (זהו  $\Delta x$ )

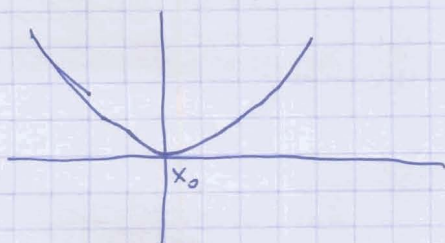
אולי  $\Delta x$  גדול  $\Delta b$  (זהו  $\Delta x$ )

אולי  $\Delta x$  קטן  $\Delta b$  (זהו  $\Delta x$ )

$\Delta x$  - זהו  $\Delta x$ .

אולי  $\Delta x$  קטן  $\Delta b$  (זהו  $\Delta x$ )

אולי  $\Delta x$  גדול  $\Delta b$  (זהו  $\Delta x$ )



# מצא שורשים פונקציה

א- (נרשם):

- הצטרף הסדר

- הצטרף קצב המספר

- ע"פ טאולוריה

סחיה

Cord סמל

Secant

Regula-falsi

נכס

- קודם נכס

הצטרף

היה פונקציה חזקה. נרצה למצוא  $x$  כך  $f(x) = b$ .  
יש פונקציה  $f$  למצוא עבור  $x$  ויש  $b$  נקודה. ננסה למצוא קרואין.  
למשל יהיה  $f(x) = x^2$ , ואז עלינו למצוא  $x$  כך  $x^2 = b$ .

$$F(x, b) = f(x) - b$$

נמצא  $(x, b)$  המביא  $F(x, b) = 0$  כך  $F(x, b) = 0$  (נמצא סמל)

במסגרת הפונקציה המוגדרת. אזי נרצה שיהיה  $x = G(b)$  (האם?)

עם זאת עקביותה להציג  $x = G(b)$  (אזי נרצה)

~~$$x = x_0 + \Delta x, b = b_0 + \Delta b$$~~

$$x = x_0 + \Delta x, b = b_0 + \Delta b$$

$$F(x_0, b_0) = 0$$

$$F(x, b) = F(x_0 + \Delta x, b_0 + \Delta b) = 0$$

$$0 = F(x, b) \approx F(x_0, b_0) + F_x(x_0, b_0) \Delta x + F_b(x_0, b_0) \Delta b + o(\Delta x, \Delta b)$$

$$\Delta x = - \frac{F_b(x_0, b_0)}{F_x(x_0, b_0)} \Delta b + o(\Delta x, \Delta b)$$

$$|\Delta x| \approx \frac{|F_b|}{|F_x|} |\Delta b|$$

לפיכך נרצה למצוא  $x$  כך  $F(x, b) = 0$

$F_x(x) = \frac{d}{dx} F(x, b)$

האם  $F_x(x) \neq 0$ ...

$F_b(x) = \frac{d}{db} F(x, b)$

אם  $F_b(x) \neq 0$ ...

נסתכל על הפונקציה:

$$f(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1 = (x-1)^7$$

יש לה נקודה אבס  $x=1$ . ~~אשר לכל הערכים של  $x$  מתקיים~~

כעקב אנחנו מבינים שהפונקציה הזו במעשה, אז הסימנים שלהם הוא למעשה

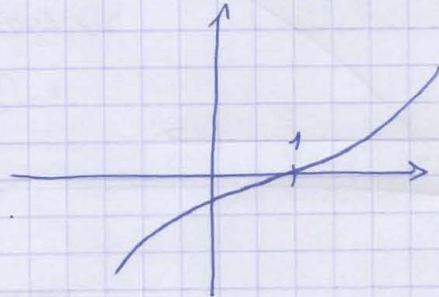
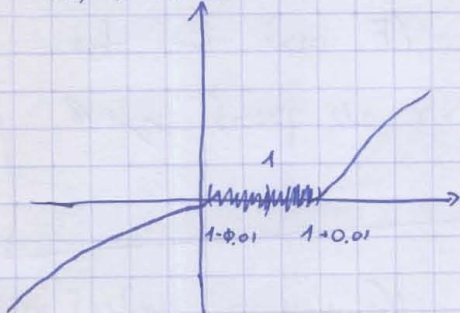
(כל האברים) ואז קרובי לאחד, ורק יש לנו אקזיסטנציה, לכן, זהב"ל

לא יפהו אפה הנקודה אבס אז נכנסים אל הבי"ל. האורך שלמחצה מ

הפונקציה. עזרתו שמוציא כל אחד פונקציה, נקרא:

$$f(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - \dots$$

$$f(x) = (x-1)^7$$



למה? כי כל הערכים של יוצאים אבס (ב"ל) אקזיסטנציה, אז למחצה מדמה אותו

מתן מידע זה האבס האון פסגה. וסוף זה ב"ל, כי כל האבס הוא למחצה אבס.

נסכם:  $K_{abs}$  מאר ב"ל ד"ל אנחנו יב"ל. ל"ל אבס של המ"ל. אבס.

ל"ל אבס של  $\frac{1}{H_v(x)}$  ורק הרבה אבס (ב"ל) אבס.

נקרא ל-  $K_{abs}$  ב"ל Conditional Number.

$$K_{abs} = \frac{|\Delta x|/|x|}{|\Delta b|/|b|}$$

ל"ל אבס של אבס