

7.6.09

אנליזה וולריה - שיעור 2

בשיעור שעבר למדנו על מצדה וולריה ואינטגרציה וולריה.
למדנו על מספר שיטות אינטגרציה:

- שיטת החלפתן (ע"כ u ו- dv קוצר אמר)
- שיטת האינטגרציה

• שיטת האינטגרציה החלקית

• שיטת האינטגרציה הממוצעת

• שיטת האינטגרציה הממוצעת

כמו כן, הגדלנו לעצמנו בפולינומליות אינטגרציה. נחזיר את הדיון בנושא.

פולינומלים אינטגרציה

סדרה $\{P_k\}$ פולינומלים היא אינטגרציה ע"כ מכילה פולינום
ד"ל אם מקיים:

• P_k הוא פולינום ממעלה k .

• $\langle P_k, P_l \rangle = \delta_{kl}$ (באופן המכילה הפולינום בין k שנים שנים הוא אחד)

מבוא

1. אם Q פולינום ממעלה קטנה או שווה ל- k אז $Q = \sum_{i=0}^k a_i P_i$
2. אם Q פולינום ממעלה גדולה מ- k אז $P_k \perp Q$, כלומר $\langle P_k, Q \rangle = 0$

הוכחה: לפי גיוס 1 $Q = \sum_{i=0}^k a_i P_i$ חסר:

$$\langle P_k, Q \rangle = \langle P_k, \sum_{i=0}^k a_i P_i \rangle = \sum_{i=0}^k \langle P_k, a_i P_i \rangle = \sum_{i=0}^k a_i \langle P_k, P_i \rangle = 0$$

לפי אינדיקס המכילה הפולינום.

3. P_k יש קיומו k מספרים ממשיים ופרימים בקטע (a, b) . כלומר,

$$P_k = \alpha_k (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k) \quad \xi_1, \dots, \xi_k \in (a, b)$$

הוכחה: נציג את $\xi_1, \dots, \xi_k$ כמרכזי האינטגרציה (הממוצעת)

בהם P_k מחולק סימן (כלומר מספרים ממשיים). "לכן כי

$0 =$ כלומר שיש נשאר כי קיים ξ (קטור).

$Q = s(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_r)$ נניח כשליה ש-אז. נניח P_k ו- Q הם פולינומים של x ו- P_k אינו מתחלק ב- Q .
 נניח $s = \pm 1$ כך $Q = s \cdot P_k$ ו- P_k אינו מתחלק ב- Q .
 מכיוון שהפולינום Q אינו מתחלק ב- P_k , נניח $\langle P_k, Q \rangle = 0$. אבל אנחנו יודעים
 ש- $\langle P_k, Q \rangle = 0$ מכיוון שהפולינום Q אינו מתחלק ב- P_k והוא לא
 פולינום השפס (אפשר לראות ישירות ע"י הגדרת המכסה הפנימית
 המינימלית). עכשיו נניח P_k אינו מתחלק ב- Q .
 שם יכולים להיות פונקציות P_k אשר הדרגה שלהן
 (הדרגה שלהן פולינומי האבס) וכן P_k אינו מתחלק ב- Q .
 אפסים אחרים בשל"ו, פולינום $P_k = \alpha(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_r)$.

4. בהינתן מכסה פנימית P_k הפולינומים בסדר הפולינומים האורתוגונליים
 נקבעים ביחידות עד כדי קבוע כפלי.

הוכחה: אנחנו רוצים להראות שאם P_k אינו מתחלק ב- P_j אז
 שניהם (חלק מהם) הם P_k ו- P_j . האם האם
 כוונתם נקבע עד כדי קבוע כפלי, כי P_k הוא פולינום
 בדרגה k , P_j הוא פולינום בדרגה j .
 P_k נקבע עד כדי $P_0, \dots, P_{k-1}$ ו- P_k אינו מתחלק ב- P_j .

5. פולינומים אשר מקיימים יחס הירקוסיה הבא הם אורתוגונליים:

$$\begin{aligned}
 A_j &= \frac{x_{j+1}}{x_j} \quad \text{נאזיר } P_j \text{ נאזיר} \\
 B_j &= \frac{\langle P_j, P_j \rangle}{S_j} \quad \text{נאזיר } S_j = \langle P_j, P_j \rangle \\
 C_j &= \begin{cases} \text{arbitrary} & j=0 \\ \frac{A_j S_j}{A_{j-1} S_{j-1}} & j \geq 1 \end{cases} \quad \text{לכסל נאזיר} \\
 P_{j+1} &= A_j(x - B_j)P_j(x) - C_j P_{j-1}(x) \quad \text{למחר הירקוסיה:}
 \end{aligned}$$

הוכחה: אחרי שניבט את ההשערה האם, נניח להוכיח את
 זה סימטרי, קודם כל, אנחנו רוצים להוכיח כי כל הפולינומים
 מסדרה אורתוגונליים כלפי. לכן, נוכיח כי נניח
 P_{j+1} הוא אורתוגונלי לכל קודמיו, ולכן האם אפשר להוכיח
 נניח שכל צדדן P_k יקראוהו שהוא אורתוגונלי לפני

קוצני ומהי 'נמס שהוא אירואסני' סכנ קוצני. $\langle P_j, P_{j-1} \rangle = 0$ נוסח כי

$$\langle P_{j+1}, P_i \rangle = 0 \quad \text{for } i \leq j-1 \quad \text{and} \quad \langle P_j, P_i \rangle = 0 \quad \text{for } i \leq j-1$$
$$(x \rightarrow 1) \quad A_j, B_j, C_j \quad \text{так} \quad P_{j+1} = A_j(x - B_j)P_j(x) - C_j P_{j-1}(x) \quad \rightarrow \quad \text{так}$$

$\Rightarrow$ לכל $n \in \mathbb{N}$, $P_n, P_{n+1} \in \mathcal{P}$ וכן $P_n \cap P_{n+1} = \emptyset$

אנחנו יודעים: $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ אורקליות. לכן (באמצעות הדרכה הסתמית).

$$\langle p_{j-1}, p_L \rangle = 0 \quad : \text{ז'ר הנחתה}$$
$$\langle P_j, P_l \rangle = 0 \quad \text{: זהו הניר}$$
$$\langle xP_j, P_L \rangle = \langle P_j, xP_L \rangle = 0$$

השאלות האחרות מוקדמות. λ יכול להיות 2: λP_L הוא כולל גם את P_L

- P: ~ N odd

לפי נוסח ה' להוכיח כי $P_{j+1} \perp P_j$, $P_{j+1} \perp P_{j-1}$, $P_{j+1} \perp P_{j-2}$

כבוד ארץ ישראל הרקליסיה וירליה דאז

$$\langle P_{j+1}, P_j \rangle = A_j \left[\langle x P_j, P_j \rangle - \frac{\langle x P_j, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \cdot \langle P_j, P_j \rangle \right] - C_j \langle P_{j-1}, P_j \rangle = A_j \cdot 0 - C_j \cdot 0 = 0$$

$$\langle P_{j-1}, P_{j-1} \rangle = A_j \left[\langle P_j, (x P_{j-1} - \frac{P_j}{A_{j-1}}) \rangle \right] = A_j \langle P_j, (x P_{j-1} - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} P_j) \rangle$$

$x^j \in \mathcal{C}$ שיהיה x_{j-1} ה' α_{j-1} , ו $x^j \in \mathcal{C}$ יהיה x^j

קבול: $p_j = \frac{a_{j-1}}{a_j} p_j$ ה"ל a_{j-1} מכ"ל, ~~ה"ל~~ כי"ל a_{j-1} ח"ל a_j $j-1$

(1) H^+ is a cation $\geq$ 1

$$= A_j \langle p_j, q \rangle = A_j \cdot 0 = 0$$

1730 מפורסם ש פול נאוי אורמילוס"פ

כ.ס. שילוני, המכונה י, רב, מכסה בניה י' סדרה סליניא גוראסאני

י' תיבה (עז רבי גדול) ~~ה~~ רבי'. רבי'אן שבתה'א' חפלה פני'א

נבדל, לו שאז ע"פ חס"ד האל"ף, יבטל וי-חב יבטל וסדרה

הוא. גודל המקור הוא נקודה אדומה ממוצעת $P_0 = 1 - \frac{1}{2}$ לכל t .

סדרה יחידה (מלא קצוץ בשר). אוטו לא, לא יבא יום (יבא) מלא סדרה

(12/12)

פולינומי לג'נדר (Legendre)

לג'נדר נקבע לעצמו ש במרחב המכסה הכי מסתם: $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g dx$ ($w=1$)

הסדרה גורמת באמצעות הרקורסיה: $P_{k+1} = \frac{1}{k+1} [(2k+1)x P_k(x) - k P_{k-1}(x)]$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$P_5 = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

...

על המסלול, גחיל הסדרה נראה כך:

$$\forall k. P_k(1) = 1$$

(שים לב לעדו וכוונתו של הסדרה:

פולינומי 'עקובי'

'עקובי' מרחב סדרת פולינומים במרחב המכסה $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g w dx$

עבור w מהצורה: $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ $\alpha, \beta > -1$.

פולינומי צ'בישב

פולינומי צ'בישב הם אוניטאריים במרחב המכסה $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f g}{\sqrt{1-x^2}} dx$

כלומר עבור $w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (שמה קרה הצי, אבל מסתבר שהם מסוגל חסידים)

ואנחנו לא נעזר בהם באינטגרציה נורמלית בהמשך. נשים לב כי זהו מקרה

פרטי של פולינומי 'עקובי' ($\alpha = \beta = \frac{1}{2}$).

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$$

נצייר:

נבנה תהליכים T_n באלו סדרה אוניטאריים. נכנסו אל החלק הראשון

שהוא, והחלק השני יושב לקובא.

למשל: $T_n(x)$ הוא פולינום ממעלה n .

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

הוכחה: נכנסו אל האינטגרציה. קל לבדוק כי

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

כעת נכנסו כי הסדרה מקימה את הרקורסיה:

הערה קופה באופן ברור.

אם הצדדים של המערכת הם שווים, נקרא למערכת קירוב
 ע"י אמצעים המופיעים על סמך קירוב. במידה שיש
 מיקום למערכת, במידה שיש מיקום למערכת.

על היות, המידה של המערכת המופיעה ב- $\int_a^b \psi_{k+1} \omega$
 הוא $\int_a^b \psi_{k+1} \omega$, והמידה המופיעה ב- $\int_a^b \psi_{k+1} \omega$
 של קירוב המופיעה. אך אנו יודעים שיש גם הצדדים המופיעים
 (כך שיש אזהרה על המידה המופיעה).

נניח כי $x_0, \dots, x_k$ הם שברים של המערכת P_k למעשה
 המופיעה $\langle f, g \rangle = \int_a^b f g \omega$. ψ_{k+1} הוא P_k (על ידי קירוב)
 עכשיו $\int_a^b \psi_{k+1} \omega = \langle \psi_{k+1}, 1 \rangle = 0$. עכשיו נניח להפך $\int_a^b \psi_{k+1} \omega = 0$
 למעשה ישנו מערכת נקרא E .

$$E = \int_a^b g[x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x] \underbrace{\psi_{k+1}(x - x_{k+1})}_{\psi_{k+2}} \omega dx$$

מה שישנו מערכת היה למעשה ψ_{k+1} , והמידה של המערכת E
 נניח שישנו מערכת ψ_{k+1} :

$$\int_a^b \psi_{k+1} \omega dx = \int_a^b \psi_{k+1}(x - x_{k+1}) \omega dx = \langle \psi_{k+1}, (x - x_{k+1}) \rangle = 0$$

המידה המופיעה ψ_{k+1} היא פולינום ממעלה $k+1$, ולכן
 המערכת E היא פולינום ממעלה $k+2$. עכשיו נניח להפך E
 שוב!

$$E = \int_a^b g[x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x] \underbrace{\psi_{k+1}(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}_{\psi_{k+3}} \omega dx$$

$$\int_a^b \psi_{k+1}(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \omega dx = \langle \psi_{k+1}, (x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \rangle = 0$$

ולכן נניח להפך E המופיעה! עכשיו נניח להפך E
 עכשיו ישנו $(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \dots (x - x_{k+m})$ ψ_{k+1} , ולכן
 המערכת E היא ψ_{k+1} :

$$E = \int_a^b g[x_0, \dots, x_{k+m}, x] \psi_{k+m+1} \omega dx$$

דיון $k+1$ $N(N)$ $(x_{k+1}, \dots, x_{2k+1}, x_{2k+2})$ $\rightarrow$ $N(N)$ $N(N)$

נסת - $\int$ הקטור הרמאני. ער' בומאן

עס איז שוין סוף, כ' ט' האבט איר דא געזעהן. דאס האט

Ex 1.2

$$E = \frac{g^{(2k+2)}(\eta)}{(2k+2)!} \int_a^b \psi_{2k+2} \omega dx = \frac{g^{(2k+2)}(\eta)}{(2k+2)!} \int_a^b (\psi_{k+1})^2 \omega dx$$

ה'תש"ח י"ב כ"ג

 $\omega = 1$ 2.3) Geo