

2.7.09

שיעור נוסף - גרסאות

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^{(0)}) (x_i - x_i^{(0)})}_{\text{גרסאות ליניאר}} + o(\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\|)$$

כאן $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) \Delta \underline{x}$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} f_1(\underline{x}) = f_1(\underline{x}^{(0)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x}^{(0)}) (x_i - x_i^{(0)}) + o(\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\|) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) = f_n(\underline{x}^{(0)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\underline{x}^{(0)}) (x_i - x_i^{(0)}) + o(\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\|) \end{cases}$$

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}^{(0)}) + J(\underline{x}^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ x_2 - x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{pmatrix} + o(\|\underline{x} - \underline{x}^{(0)}\|)$$

לדוגמה

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x^2+y^2} - e \\ e^{x^2+y^2} - 1 \end{pmatrix}$$

הפונקציה $F(x, y)$ היא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{x}{1-x}} \\ \pm \sqrt{\frac{y}{1-y}} \end{pmatrix}$$

אם $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$

$\underline{x}^{(k)} = \underline{r} + \underline{\delta}$

$$0 = \underline{f}(\underline{r}) = \underline{f}(\underline{x}^{(k)} - \underline{\delta}) = \underline{f}(\underline{x}^{(k)}) - J(\underline{x}^{(k)}) \cdot \underline{\delta} + o(\|\underline{\delta}\|)$$

$$J(\underline{x}^{(k)}) \cdot \underline{\delta} = \underline{f}(\underline{x}^{(k)}) + o(\|\underline{\delta}\|)$$

$$\underline{\delta} \approx J^{-1}(\underline{x}^{(k)}) \cdot \underline{f}(\underline{x}^{(k)})$$

$$\underline{r} = \underline{x}^{(k)} - \underline{\delta}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - J^{-1}(\underline{x}^{(k)}) \cdot \underline{f}(\underline{x}^{(k)})$$

כלומר $\underline{r}$ הוא נקודת המינימום, $\underline{\delta}$ הוא הווקטור הנדרש

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2xe^{x^2+y^2} & -2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

נניח $\underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ ונניח $\underline{f}(\underline{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

נורמה וקטורית

נורמה היא פונקציה מהצורה $R^n \rightarrow R$ המקיימת:

$$\|v\| \geq 0$$

א. הומוגניות

$$\forall v \neq 0, \|v\| > 0, \|0\| = 0$$

ב. חיוביות

$$\forall v_1, v_2, \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

ג. אי שוויון המשולש

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |v_i|^p}$$

הפונקציה הקטנה היא נורמה:

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \{|v_i|\}$$

היא נקראת נורמה ∞ :

הצורה: בהינתן נורמה וקטורית $\| \cdot \|$ על R^n נגזרת מהצורה $R^n \rightarrow R$

היא נקראת נורמה ∞ :

$$\forall B \in R^{n \times n}, \|B\| := \max_{v \neq 0} \frac{\|Bv\|}{\|v\|}$$

$$\forall v \in R^n, \|Bv\| \leq \|B\| \cdot \|v\|$$

אנליזה

דוגמה: עבור נורמה וקטורית $\| \cdot \|$ וצורה $A \in R^{n \times n}$ נגזרת מהצורה $R^n \rightarrow R^n$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

הוכחה: נניח $A, B \in R^{n \times n}$. נגדיר $C = A \cdot B$. נראה כי $\|C\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
נניח $v \in R^n$. אז $\|Cv\| = \|A(Bv)\| \leq \|A\| \cdot \|Bv\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|v\|$.
לכן $\|C\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

אנליזה

$$\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

הוכחה: נניח $v \in R^n$. אז $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n} \|v\|_\infty$.

$$(\|v\|_\infty)^2 = \max_{i=1, \dots, n} \{ |v_i|^2 \} \leq \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = (\|v\|_2)^2$$

הוכחה

$$(\|v\|_2)^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq n \cdot \max_{i=1, \dots, n} \{ |v_i|^2 \} = n (\|v\|_\infty)^2$$