

מד"ר 1 – תרגול 7

עדכון! אפשר להגיש את השיעורי בית בזמן יותר מאוחר.
עדיף להגיש ליום שני מאשר לא לעשות בכלל. אז מעכשיו אפשר פשוט להגיש את התרגיל בתא שלו עד שני.

נניח שיש לנו משוואה דיפרנציאלית:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

נשים לב שלתנאי ההתחלה יש שתי משוואות (בגלל סדר המשוואה).

נרצה לכתוב את הבעיה בצורה וקטורית. נסמן: $V = y'$. ואז:

$$\begin{cases} V' = -5V - y + 1 \\ y' = V \end{cases}$$

קיבלנו מערכת שיש בה רק נגזרות ראשונות, ואותה אפשר לכתוב בצורה וקטורית. איך אנחנו עושים את זה?

נגדיר את הוקטור:

$$\begin{pmatrix} V \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בצורה מקוצרת:

$$\vec{u}' = A \cdot \vec{u} + B$$

כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חוץ מזה יש לנו את הוקטור של תנאי ההתחלה:

$$\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} V(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז עכשיו אנחנו רואים שקיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון (למעשה זה משוואה עם נגזרת של וקטור, אז זה למעשה מערכת משוואות מסדר ראשון). אם המשוואה המקורית היא לא ליניארית אז גם לא נקבל בצורה הוקטורית משוואה ליניארית, ותהיה לנו שם פונקציה כללית (נשים לב שבאמת עכשיו היא ליניארית - הוקטור הוא כפול מטריצה). כלומר בצורה הכללית הוקטור שלנו יהיה:

$$\vec{u}' = \vec{F}(\vec{u}, x)$$

שיטת פיקרד

כעת נזכר שהתחלנו עם פתרון של משוואה דיפרנציאלית שאפשר למצוא בשיטת פיקרד. ונזכר איך אנחנו צריכים לעבוד עם פיקרד ויש לנו משוואה: $y' = F(y, x)$ ותנאי התחלה $y(a) = y_0$. אז איך אנחנו עושים כאן שיטת פיקרד? אנחנו כותבים:

$$y = y_0 + \int_a^x F(y(s), x) ds$$

שזו המשוואה שאם אנחנו יכולים למצוא פונ' כזו שמקיימת אותה (שהיא גזירה) אז היא פתרון לבעיה קושי. (כלומר המשוואה הזו שקולה לשתי המשוואות הקודמות - זו עם f וזו של התנאי התחלה).

האיטרציות נראות בצורה הזו:

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_a^x F(y_k(s), x) ds$$

זו היא נוסחה איטרטיבית ואנו מתחילים עם: $y_0 = y_0$.

אז את אותה השיטה אנחנו נעשה עבור בעיה קושי הוקטורית שלנו (בין אם היא ליניארית ובין אם לא).

כלומר האיטרציות יראו כך:

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}(0) + \int_0^x \vec{F}(\vec{u}_k(s), s) ds$$

(כמובן לאו דווקא האינטרגל מתחיל מ-0, אלא לפי הנתון של תנאי ההתחלה)

במקרה שלנו זה:

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}(0) + \int_0^x (A \cdot \vec{u}_n(s) + B) ds$$

כאשר תנאי ההתחלה הוא $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

כעת נבצע כמה איטרציות:

אצלנו הפונ' F היא:

$$A \vec{u}_n(s) + B = \begin{pmatrix} -5V_n - \gamma_n + 1 \\ V_n \end{pmatrix}$$

והאיטרציות: (נשים לב שאנו עושים אותן לפי קורדינאטות)

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 & \gamma_0 &= 1 \\ V_1 &= V_0 + \int_0^x (-5V_0 - \gamma_0 + 1) ds = \int_0^x 0 ds = 0 \\ \gamma_1 &= \gamma_0 + \int_0^x V_0 ds = 1 + 0 = 1 \\ V_1 &= 0 & \gamma_1 &= 1 \end{aligned}$$

אז יש לנו מזל! "זה לא תמיד ככה, זה רק כשיש לנו מזל" וברור כי האטרציה הבאה היא בדיוק כמו הנוכחית (וכך גם שאר האיטרציות).

ולכן בסך הכל האיטרציות מתכנסות ל:

$$V = 0 \quad \gamma = 1$$

כעת אפשר להציב במשוואה המקורית ולראות שזה באמת מתקיים:

$$(1)'' + 5 \cdot (1)' + 1 = 1$$

תרגיל

נתונה המשוואה:

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

תיאוריה שנלמד בהמשך ונניח כי נכונה עבור פתירת התרגיל:
פתרונות עבור משוואה מסדר שני הן מרחב וקטורי הנפרש ע"י שני פתרונות
בת"ל. אנו נראה בתרגיל זה איך למצוא את הפתרון השני מתוך הראשון.
כמו כן, נמצא תחילה את הראשון.

אם אנחנו יודעים פתרון אחד, אז יש לנו שיטה להגיע לפתרון הכללי (בהמשך נראה איך להגיע לשני, והמרחב שהם פורשים, כלומר $a \cdot f_1 + b \cdot f_2$ כאשר f_1, f_2 הם 2 פתרונות בת"ל ו- a, b קבועים – הוא הפתרון הכללי)

אז יש לנו תחילה את הבעיה איך למצוא את הפתרון הראשון. אנו רואים שמשוואה הזו היא עם מקדמים פולינומים, אז טבעי להניח שגם הפתרון הוא פולינום (לא באמת, אבל זו הפונ' הכי פשוטה שאנחנו מכירים וננסה לראות האם זה הפתרון).

אז נניח כי הפתרון הוא:

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

הנגזרת הראשונה היא:

$$y' = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2a_2x + a_1$$

והשנייה:

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots + 2a_2$$

אם אנחנו רוצים תשובה רק לגבי מה הוא n , מספיק להתסכל על המחובר הראשון בכל אחד מה- 3 שוויונות האחרונים:¹

$$(x^2+1)n(n-1)x^{n-2} - 2xn x^{n-1} + 2x^n = x^n (n(n-1) - 2n + 2) + \dots$$

(*)

ונרצה לדעת מתי האיבר המסומן ב- (*) הוא שווה ל- 0:

$$n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow n = 1, 2$$

השיטה הזו עובדת רק כאשר המשוואה הומוגנית (כלומר השמוואה המקורית הייתה ללא איבר חופשי - אם היה רשום שם x^2-1 או משהו כזה [כלומר פונ' של x - כזו שלא מוכפלת ב- y או y' או y''], לא היינו יכולים לעשות את זה)

נקח את ה- n היותר קטן (כי אנחנו רוצים עכשיו למצוא את הפתרון הכי פשוט, גם $n=2$ יביא פתרון, אבל יותר מסובך - יותר עבודה).

כלומר הפתרון שלנו הוא מהצורה $y = ax + b$. ובבית אפשר (ע"י הצבה פשוטה) למצוא כי הפתרון

הוא: $y = x$.

1 הסיבה שיש להסתכל רק על המחובר הראשון היא: אנחנו ניחשנו פונקציה מסויימת שאנחנו מאמינים שתפתור את המשוואה. לפתור את המשוואה זה אומר שאם אנחנו מציבים אותה במשוואה שאנחנו צריכים לפתור, אנחנו מקבלים שוויון פונקציות בין אגף שמאל (זה עם כל הנגזרות) ולאגף ימין (0). כיוון שאחרי הצבה באגף שמאל קיבלנו פולינום וצד ימין הוא גם פולינום (0), כדי שהם יהיו שווים (כפונקציות) צריך שכל מקדם של x^i יהיה שווה. אנחנו החלטנו לבדוק את זה עבור $i=n$ במקרה הזה (כדי למצוא את n), שאנחנו יודעים שבאגף ימין המקדם של x^n הוא אפס

נוסחה כללית שמאפשרת למצוא את הפתרון השני

הנוסחה:

$$y_1 \cdot y_2' - y_1' y_2 = e^{-\int p(x) dx}$$

מה זה $p(x)$?

אפשר לכתוב את המשוואה בצורה קנונית:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(כאן רואים את ההומוגניות שלה – אין כאן פונ' של x חופשייה) ולכן במקרה שלנו:

$$p(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}$$

ואז נשתמש בנוסחה:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2}$$

ואחרי כמה אינטגרציות נקבל את הפתרון השני.